МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ
Кафедра екології та технологій захисту навколишнього середовища

Ю.В. Бучавий

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ

Інформаційне та програмне забезпечення для виконання лабораторних робіт з дисципліни «Моделювання та прогнозування стану довкілля» для здобувачів ступеня бакалавра освітньо-професійних програм «Екологія» спеціальності 101 «Екологія» та «Технології захисту навколишнього середовища» спеціальності 183 Технології захисту навколишнього середовища

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

Ю.В. Бучавий

Моделювання та прогнозування стану довкілля [Електронний ресурс]: Інформаційне та програмне забезпечення для виконання лабораторних робіт з дисципліни «Моделювання та прогнозування стану довкілля» для здобувачів ступеня бакалавра освітньо-професійних програм «Екологія» зі спеціальності 101 Екологія» та «Технології захисту навколишнього середовища» зі спеціальності 183 Технології захисту навколишнього середовища / Ю.В. Бучавий; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 48 с.

Автор:
Ю.В. Бучавий, канд. біол. наук, доц.

.

Уміщено теоретичні відомості за темами лекційного курсу, мету лабораторних робіт, постановку задачі, рекомендації до виконання, контрольні питання, приклади та розрахункові шаблони для розв’язання завдань за допомогою програм *PTC MathCAD* та *The MathWorks MatLAB* (*SciLab)*, список використаної та рекомендованої літератури.

Орієнтовано на активізацію навчальної діяльності здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей «Екологія» та «Технології захисту навколишнього середовища» та закріплення практичних навичок у засвоєнні дисципліни «Моделювання та прогнозування стану довкілля» з використанням сучасного програмного забезпечення.

Методичні рекомендації розроблені на кафедрі екології та технологій захисту навколишнього середовища Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» в рамках міжнародного спільного проєкту «Створення німецько-української університетської мережі для забезпечення успішної освіти в українських університетах під час війни та кризи» за підтримки програми DAAD «Україна цифрова: Забезпечення академічної успішності в умовах кризи, 2024».

ЗМІСТ

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ 4

2. ОБГРУНТУВАННЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЩО ЗАСТОСОВУЄТЬСЯ 5

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ І МЕТОДИЧНІ 7

РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ЇХ ВИКОНАННЯ 7

Лабораторна робота №1 Оцінка і прогноз забруднення води в колекторі з використанням математичної моделі у вигляді системи лінійних рівнянь 7

Лабораторна робота №2 Прогноз значення викиду шкідливого газу, що приводить його концентрацію в контрольній зоні до встановленого рівня 13

Лабораторна робота №3 Аналіз динаміки чисельності популяції на дискретній моделі 17

Лабораторна робота №4 Визначення значень факторів гірничого об'єкта, що приводять концентрацію шкідливих речовин у контрольній зоні до рівня ГДК21

Лабораторна робота №5 25

Визначення екстремальних значень концентрації пилу в повітрі за фактором швидкості вітру 25

Лабораторна робота №6 Побудова регресійної моделі, що встановлює залежність росту зеленої маси лісопосадки від річних опадів 29

Лабораторна робота №7 Прогноз екологічних показників методами згладжування часових рядів 35

Лабораторна робота №8 Дослідження залежності зміни концентрації пилу за довжиною вентиляційного каналу 41

КРИТЕРІЇ ТА ПРОЦЕДУРИ ОЦІНЮВАННЯ 46

Рекомендована література 47

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Дисципліна «Моделювання та прогнозування стану довкілля» – складова фахової підготовки бакалаврів спеціальностей 101 «Екологія» та 183 «Технології захисту навколишнього середовища». Головна мета дисципліни – формування у майбутніх фахівців з екології та захисту навколишнього середовища компетенцій (знань, умінь та навичок) необхідних для прийняття обґрунтованих рішень з контролю та оцінювання стану забруднення довкілля і промислових викидів в атмосферу, скидів у водойми та відходів за результатами аналізу динаміки їх зміни в залежності від умов та технологій захисту компонентів довкілля або очищення від забруднюючих речовин.

Методичні рекомендації призначені для закріплення теоретичних знань, набутих здобувачами в лекційному курсі, а також формування практичних навичок виконання лабораторних робіт щодо моделювання та оцінки і прогнозу стану довкілля.

В результаті виконання лабораторних робіт здобувачі освіти як майбутні фахівці мають опанувати системний підхід до вирішення питань визначення стану довкілля та набути практичних навичок математичного моделювання стану об’єктів природи і дослідження отриманих моделей математичними методами, за допомогою ЕОМ із спеціалізованим програмним забезпеченням.

МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Загальна мета лабораторного практикуму – поглибити і систематизувати набуті студентами на лекціях теоретичні знання з дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля» та виробити у студентів навички побудови математичних моделей і прогнозування на їх основі екологічного стану природних і промислових об’єктів та навколишнього середовища за допомогою спеціалізованим програмного забезпечення.

Лабораторний практикум передбачає застосування загальновідомих математичних моделей і методів, які можуть бути використані для оцінки і прогнозування стану довкілля. Кожна лабораторна робота має назву, ціль, постановку задачі, які сформульовані у термінах дисципліни, що вивчається. Розв’язання завдань має здійснюватися за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення: *PTC MathCAD* та *The MathWorks MatLAB (Scilab)*, що дозволяє реалізувати комплексні математичні моделі та автоматизувати рутинні розрахунки.

Для кожної лабораторної роботи пропонується електронний розрахунковий шаблон (або лістинг) для реалізації певної математичної моделі у програмному середовищі, а також методичні рекомендації з презентацією у форматі *PowerPoint* із детальними роз’ясненнями процедури моделювання.

В результаті опанування даного курсу здобувачі отримують знання та навички, необхідні для побудови комплексних математичних моделей за допомогою спеціалізованих програм *PTC MathCAD* та *The MathWorks MatLAB (Scilab)*.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЩО ЗАСТОСОВУЄТЬСЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Mathcad – система комп'ютерної алгебри з класу систем автоматизованого проєктування, орієнтована на підготовку інтерактивних документів з обчисленнями і візуальним супроводженням, відрізняється легкістю використання і застосування для колективної роботи.

Mathcad належить до так званих систем комп'ютерної алгебри, тобто засобів автоматизації математичних розрахунків. В цьому класі програмного забезпечення існує багато аналогів різноманітної спрямованості і принципу побудови. Найбільш часто Mathcad порівнюють з такими програмними комплексами, як *Maple*, *Mathematica*, *MATLAB*, а також з їх аналогами *MuPAD*, *SciLab*, *Maxima* та ін. Втім, об'єктивне порівняння ускладнюється у зв'язку із різним призначенням програм і ідеологією їх використання.

Mathcad має простий і інтуїтивний для використання інтерфейс користувача. Для введення формул і даних можна використовувати як клавіатуру, так і спеціальні панелі інструментів. Дані можна імпортувати з таблиць Excel, аналізувати та експортувати назад до *Excel*.

Основна відмінність *Mathcad* від аналогічних програм – це графічний, а не текстовий режим вводу виразів. Для набору команд, функцій, формул можна використовувати як клавіатуру, так і кнопки на численних спеціальних панелях інструментів. В будь-якому разі – формули будуть мати звичний, аналогічний книжковому, вигляд. Тобто особливої підготовки для набору формул, власне, й не потрібно. Обчислення із введеними формулами здійснюються за бажанням користувача або миттєво, одночасно із набором, або за командою.

Нове покоління – *Mathcad Prime* (поточна версія 9.0) зворотної сумісності із попередніми версіями *Mathcad* не має (можлива конвертація файлів попередніх версій у формат *Mathcad Prime*). Робота здійснюється в межах робочого аркуша, на якому рівняння і вирази відображаються графічно, на противагу текстовому запису в мовах програмування. При створенні документів-програм використовується принцип *WYSIWYG* (*What You See Is What You Get* – «що бачиш, те й отримуєш») набору математичних виразів та тексту у інтерактивному блокноті.

Попри те, що ця програма здебільшого орієнтована на користувачів-непрограмістів, *Mathcad* також використовується в складніших проєктах, щоб візуалізувати результати математичного моделювання, шляхом використання найбільш поширених обчислень і традиційних мов програмування.

Mathcad доволі зручно використовувати для навчання, обчислень і інженерних розрахунків. Відкрита архітектура застосунків у поєднанні з підтримкою технологій *.NET* та формату *.xml* дозволяють легко інтегрувати *Mathcad* практично в будь-які IT-структури і інженерні застосування. Є можливість створення електронних книг (*e-Book*).

MATLAB – пакет прикладних програм для числового аналізу, а також мова програмування, що використовується в даному пакеті. Система створена компанією *The MathWorks* і є зручним засобом для роботи

з математичними матрицями, малювання функцій, роботи з алгоритмами, створення робочих оболонок (інтерфейсів користувача) з програмами в інших мовах програмування. Хоча цей продукт спеціалізується на чисельному обчисленні, спеціальні інструментальні засоби працюють з програмним забезпеченням *Maple,* що робить його повноцінною системою для роботи з алгеброю.

MATLAB надає користувачеві велику кількість функцій для аналізу даних, які покривають майже всі області математики, зокрема:

- Матриці та лінійна алгебра – алгебра матриць, лінійні рівняння, власні значення і вектори, сингулярності, факторизація матриць та інше.
- Многочлени та інтерполяція – корені многочленів, операції над многочленами та їх диференціювання, інтерполяція та екстраполяція кривих…
- Математична статистика та аналіз даних — статистичні функції, статистична регресія, цифрова фільтрація, швидке перетворення Фур'є та інші.
- Обробка даних – набір спеціальних функцій, включаючи побудову графіків, оптимізацію, пошук нулів, чисельне інтегрування та інше.
- Диференційні рівняння – вирішення диференційних і диференційно-алгебраїчних рівнянь, диференційних рівнянь із запізнюванням, рівнянь з обмеженнями, рівнянь в часткових похідних та інше.
- Розріджені матриці – спеціальний клас даних пакету *MATLAB*, що використовується у спеціалізованих додатках.
- Цілочисельна арифметика – виконання операцій цілочисельної арифметики в середовищі *MATLAB*.

MATLAB підтримує створення застосунків з властивостями графічних інтерфейсів користувача. *MATLAB* включає *GUIDE* (*GUI development environment* – середовище розробки) для графічного проєктування графічних інтерфейсів користувача. Програми на *MATLAB* можуть також будувати тривимірні графіки за допомогою функцій *surf*, *plot3* чи *mesh*.

MATLAB має більше, ніж мільйон користувачів на виробництвах і науковців. Ціна базової комерційної версії без інструментів близько 2000 дол. США і лише 100 дол. США для навчальних закладів із мінімальним набором інструментів.

Scilab – пакет наукових програм для чисельних обчислень, що надає потужне відкрите середовище для інженерних і наукових розрахунків. Середовище комп'ютерної математики Scilab надає схожу на *Matlab* мову і набір функцій для математичних, інженерних і наукових розрахунків.

Важливими відмінностями даного пакету програм від *MATLAB* є:

- Безкоштовність
- Маленький розмір програмного продукту
- Можливість запуску в консолі без використання графічного інтерфейсу. Це дозволяє проводити автоматизовані обчислення; є пакетний режим.

Пакет підходить для професійного застосування і використання у ЗВО, надаючи інструменти для різноманітних обчислень: від візуалізації, моделювання та інтерполяції до диференціальних рівнянь та математичної статистики. Підтримується виконання сценаріїв, написаних для *Matlab*.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ І МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ЇХ ВИКОНАННЯ

Лабораторна робота №1
Оцінка і прогноз забруднення води в колекторі з використанням математичної моделі у вигляді системи лінійних рівнянь

Мета роботи. Набуття навичок встановлення рівнів забруднення навколишнього середовища та їх тенденції на моделі у вигляді системи лінійних рівнянь з декількома векторами вільних членів, що відповідають скидам забруднюючих речовин у колектор.

Виконання лабораторної роботи сприятиме формуванню у здобувачів наступних результатів навчання:

- володіння модельним підходом до об'єктів навколишнього середовища та уміти проводити пошук інформації;
- застосовування лінійних моделей в аспектах навколишнього середовища.

Постановка задачі. Концентрація C_j $(j = 1, \bar{n})$, мг/м^3, шкідливих речовин, наприклад, – C_1 (солі важких металів), – C_2 (механічні домішки), – C_3 (нафтопродукти, синтетично поверхнево активні речовини) і так далі до n у водозбірному колекторі, куди потрапляє забруднена вода з різних підприємств, пропорційна сумарним викидам цих речовин m підприємствами – P_1, P_2, P_3,…P_m, г/с, що визначаються щодня.

Нехай ця залежність задана моделлю у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} C_j = P_i ; при i = \overline{1, m} ; (m = n = 3) ,$$

де q_{ij} – об'ємна швидкість викиду j-ої речовини i-им підприємством, м^3/с.

Узагальнена схема до постановки задачі наведена на рис. 1.

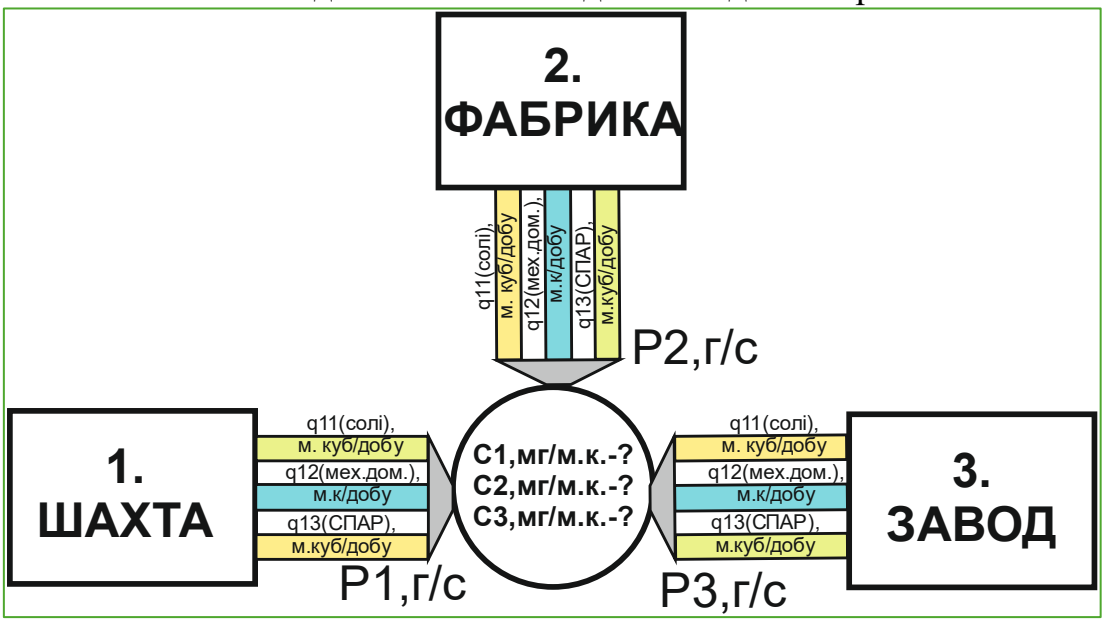


Рисунок 1 – схема скиду стічних вод у колектор

Після підставлення вихідних даних до моделі, згідно наведеної схеми отримаємо наступну систему лінійних рівнянь у загальному вигляді:

$$\begin{cases} q_{11}.c_1 + q_{12}.c_2 + q_{13}.c_3 = P_1 \\ q_{21}.c_1 + q_{22}.c_2 + q_{23}.c_3 = P_3 \\ q_{31}.c_1 + q_{32}.c_2 + q_{33}.c_3 = P_3 \end{cases}$$

Потрібно. 1. Визначити концентрації C_j для одного з трьох заданих векторів викидів P_i, шляхом розв'язання СЛАР, наприклад, векторно-матричним способом (див. методичні вказівки до роботи, що наведені нижче).

2. Одержати послідовно рішення для кожного заданого вектору скидів P_i на ЕОМ і зіставити його з рішенням, одержаним відповідно пункту 1.

3. Побудувати діаграми зміни концентрації C_j кожної шкідливої речовини згідно з різними векторами добових викидів P_i і визначити тенденцію. Практично, будують діаграми у вигляді залежності C_j від номеру вектору P_i, тобто від *i,* та визначають характер зміни концентрації відповідної речовини (зростання, зниження або наявність екстремуму).

Зміст звіту:

- постановка задачі;
- розширена матриця вихідних даних для трьох заданих векторів P_i. (Вихідну матрицю 3×3 коефіцієнтів СЛАР та три вектори її вільних членів записують згідно з варіантами, що наведені нижче);
- результат розв'язання системи рівнянь запропонованим методом (для першого вектору викидів);
- результати розрахунків на ЕОМ (лістинг, скріншоти);
- діаграми зміни концентрації кожної шкідливої речовини відповідно до викидів;
- висновки за конкретними результатами розрахунків концентрації кожної шкідливої речовини і характеристикою тенденції.

Методичні вказівки. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) виконати у матрично-векторній формі.

Сутність матрично-векторного методу

Нехай дана (СЛАР) у матрично-векторній формі $A \cdot X = B$.

Її розв'язок представляється вектором коренів$X_0(x_1; x_2 \dots x_n)$, який обчислюється за формулою $X_0 = A^{-1} \cdot B$, тобто визначаються множенням звернутої матриці коефіцієнтів A на вектор вільних членів системи.

Обертання вихідної матриці коефіцієнтів A здійснюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A} |A_T^*|,$$

де $det\, A$ - детермінант або визначник матриці; $|A_T^*|$ - транспонована матриця алгебраїчних доповнень.

Нижче наводимо порядок обертання вихідної матриці 3×3, яка має вигляд

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обчислимо спочатку її детермінант ($det\, A$). Для цього допишемо два перших стовпця матриці справа від неї $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} a_{11}a_{12}$

$a_{21}a_{22}$

$a_{31}a_{32}$, а детермінант обчислимо, як суму добутків діагоналей, які починаються коефіцієнтами з індексами 11, 12, 13 за мінусом суми добутків діагоналей, коефіцієнти яких мають індекси – 31, 32, 33, тобто

$$det\, A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Обчислимо матрицю алгебраїчних доповнень

$$\left|A^*\right| = \begin{vmatrix} A_{11}A_{12}A_{13} \\ A_{21}A_{22}A_{23} \\ A_{31}A_{32}A_{33} \end{vmatrix},$$

де $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}; A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23}$ і так далі, тобто іншіA_{ij}обчислюють, як визначники відповідних мінорів, що доповнюють тримірну матрицю (Зауваження: у випадку чотиримірної вихідної матриці, матрицею, що доповнює, була б тримірна матриця). Необхідні мінори отримують видаленням строки і стовпчика коефіцієнтів вихідної тримірної матриці, де розміщується коефіцієнт a_{ij} з відповідними індексами iта j. Причому знак при коефіцієнті A_{ij} з непарною сумою індексів iта j, тобто $i + j$, міняють на зворотній відносно знаку обчисленого визначника відповідного мінору.

Транспонування отриманої матриці виконують заміною елементів стовпців на елементи відповідних рядків матриці алгебраїчних доповнень. Отже

$$|A_T^*| = \begin{vmatrix} A_{11}A_{21}A_{31} \\ A_{12}A_{22}A_{32} \\ A_{13}A_{23}A_{33} \end{vmatrix}.$$

Правильність виконаних перетворень перевіряють шляхом множення вихідної матриці на звернуту, в результаті чого повинна бути отримана одинична матриця, тобто $A \cdot A^{-1} = E$, де $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $A \cdot X = B$, де $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix}$.

1. Обертання матриці A послідовно за наведеним вище порядком:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & -1; \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$det\ A$=1(–1)1+2·2·3+(–3)(– 4)4 –3(–1)(–3) – 4·2 ·1–1(– 42=50);

Обчислюємо: $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$= –1–8 = –9; $A_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$= –(–4–6)=10...

Аналогічно отримуємо інші A_{ij}. Далі:

$$|A_T^*| = \begin{vmatrix} -9 & 10 & -13 \\ -14 & 10 & 2 \\ 1 & 10 & 7 \end{vmatrix}; \quad |A_T^*| = \begin{vmatrix} -9 & -14 & 1 \\ 10 & 10 & 10 \\ -13 & 2 & 7 \end{vmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{vmatrix} -9 & -14 & 1 \\ 10 & 10 & 10 \\ -13 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

2. Перевірка правильності обертання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \times \frac{1}{50} \begin{vmatrix} -9 & -14 & 1 \\ 10 & 10 & 10 \\ -13 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Отримання вектору коренів:

$$X_0 = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{50} \begin{vmatrix} -9 & -14 & 1 \\ 10 & 10 & 10 \\ -13 & 2 & 7 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix},$$

звідки:

x_{01}=(–9·1+(–14)2+1·5)/50= –32/50= –0,64;
x_{02}=(10·1+10·2+10·5)/50=80/50=1,6;
x_{03}=(–13·1+2·2+7·5)/50=26/50=0,52.

4. Перевірка нев'язка (різниці між лівою і правою частинами рівняння) шляхом підстановки отриманих коренів у вихідне рівняння $A \cdot X = B$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot X = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

Для першого рядка системи маємо:

1 (–0,64)+2(1,6)+(–3)0,52= –0,64+3,2–1,56 =1,

тобто корені задовольняють першому рівнянню системи, причому нев'язка дорівнює нулю. Аналогічно можна перевірити і два останніх рівняння.

Варіанти (вхідні данні до розв'язання):

1. Перша академічна група:

$$A = \begin{vmatrix} 1{,}7 & 2{,}2 & 3{,}0 \\ 2{,}1 & 1{,}9 & 2{,}3 \\ 4{,}2 & 3{,}9 & 3{,}1 \end{vmatrix}; B1 = c \times \begin{vmatrix} 16{,}8 \\ 13{,}8 \\ 22{,}1 \end{vmatrix}; B2 = B1 \times 1{,}5; B3 = B2 \times 0{,}75.$$

2. Друга академічна група:

$$A = \begin{vmatrix} 6{,}8 & 5{,}3 & 4{,}8 \\ 3{,}3 & 7{,}1 & 6{,}8 \\ 4{,}5 & 3{,}3 & 4{,}4 \end{vmatrix}; B1 = c \times \begin{vmatrix} 16{,}1 \\ 12{,}3 \\ 10{,}9 \end{vmatrix}; B2 = B1 \times 1{,}25; B3 = B2 : 2{,}0.$$

3. Третя академічна група:

$$A = \begin{vmatrix} 7{,}1 & 6{,}9 & 6{,}1 \\ 5{,}0 & 9{,}8 & 5{,}3 \\ 8{,}2 & 7{,}8 & 8{,}1 \end{vmatrix}; B1 = c \times \begin{vmatrix} 23{,}8 \\ 27{,}0 \\ 28{,}9 \end{vmatrix}; B2 = B1 \times 1{,}5; B3 = B2 : 2{,}0.$$

Примітка: Множник c слугує для формування варіантів і обчислюється як $c = \mathbf{3} + \mathbf{0},\mathbf{1}N_{var}$, де N_{var} - номеру кожного студента за журнальним списком. Номер моделі (1;2;3.), тут і далі, відповідає номеру групи.

Рекомендації щодо розв'язання завдання в програмі *MathCAD*

Активуємо інструменти на панелі Matrix та тиснемо піктограму *Matrix or Vector*, вказуємо розміри матриці 3x3 (три строчки та три стовпики) у вікні що з'явиться. Далі заносимо числові значення в матрицю (відокремлюємо через кому цілу частину числа від десяткової) та за допомогою спеціального оператору := присвоюємо матриці зміну, наприклад *A*, рис. 2

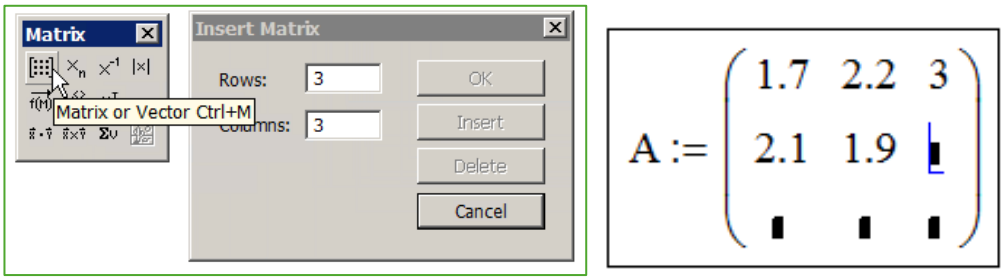


Рисунок 2 – формування матриці в *MathCAD*

Вносимо вхідні дані для розрахунків з урахуванням варіанту, при цьому значення B1, B2 та B3 представляємо у форматі матриці 3x1, тобто 3 строчки 1 стовпик, що відповідає правій частині лінійних рівнянь а саме інтенсивності скидів на 1, 2 та третю добу, рис. 1.3.

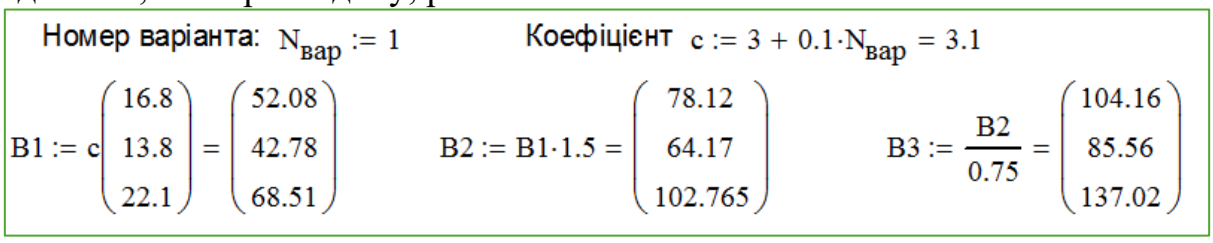


Рисунок 3 – формування векторів згідно варіантам

Далі матрицю *A* потрібно трансформувати – обернути її через возведення у мінус перший ступінь за допомогою піктограми *Inverse* на панелі матриці, та помножити на вектори *B1, B2* та *B3*, для пошуку коренів системи *X1*, *X2* та *X3*, рис 1.4

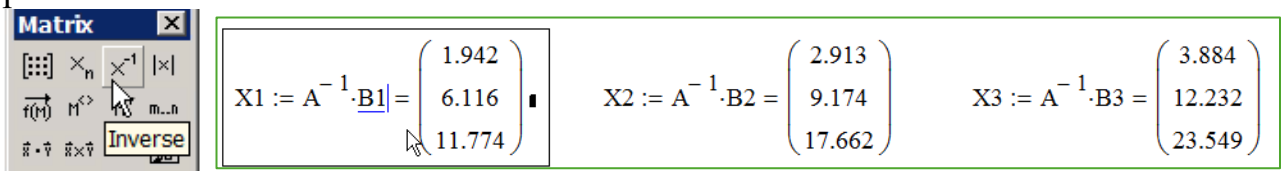


Рисунок 4 – пошук коренів системи

За результатами розрахунку отримаємо вектори *X1, X2* та *X3* кожен з яких містить значення концентрацій забруднювальних речовин у відстійнику: відповідно до постановки задачі (перша строчка – концентрація солей, друга – механічних домішок, а третя – синтетичних поверхнево активних речовин).

Перевірку розрахунків можна здійснити шляхом перемноження первинної матриці А на вектори концентрацій забруднювальних речовин *X1, X2* та *X3,* рис. 1.5

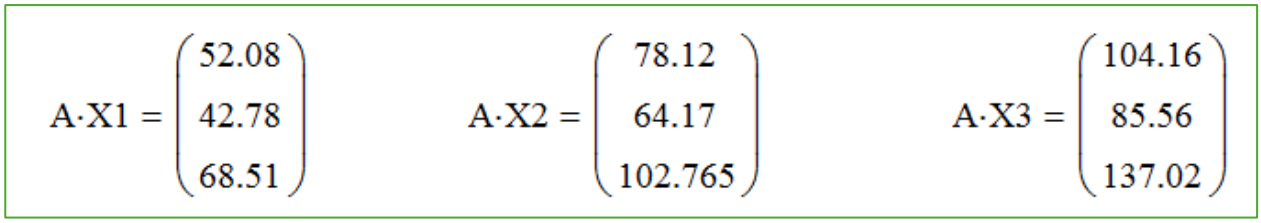


Рисунок 5 – перевірка розрахунків концентрацій речовин

У випадку успішної перевірки розрахунків маємо отримати значення векторів *B1 B2* та *B3* (див. рис. 1.3).

Для побудови графіків динаміки концентрації із підписами значень, формуємо вектори з відповідними назвами забруднювальних речовин та часовий вектор (Доба), при цьому застосовуємо посилання на потрібний елемент вектору за допомогою піктограми x_n *(Subscript)*, починаючи з «нульового елементу» який відповідає першій строчці згідно нумерації *MathCAD*, рис. 1.6

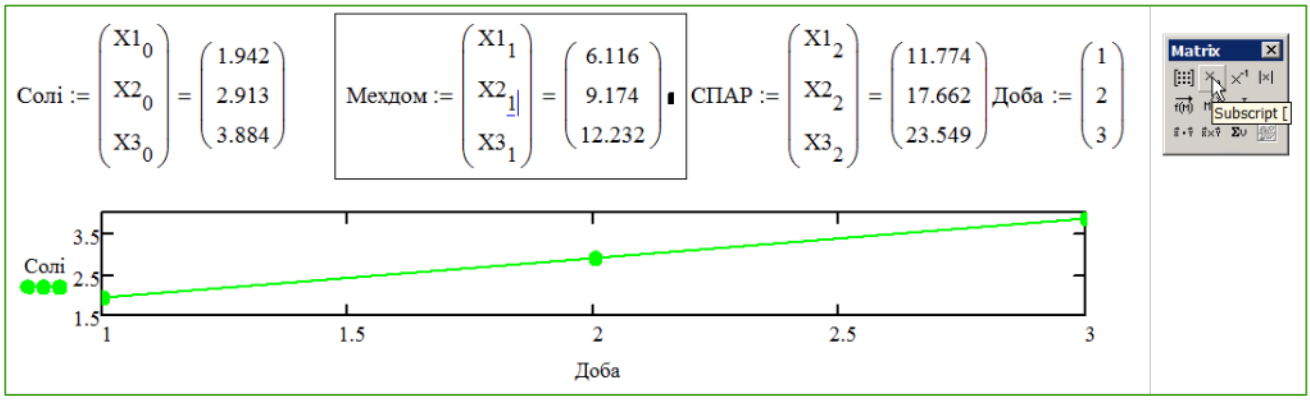


Рисунок 6 – формування графіків динаміки забруднювальних речовин

Контрольні запитання.

1. Які параметри або коефіцієнти входять до складу моделі забруднення довкілля, представленої у вигляді системи лінійних рівнянь (СЛАР)?
2. У яких величинах вимірюються концентрації забруднюючих речовин?
3. Яка розмірність викиду?
4. Що представляє собою розширена матриця СЛАР?
5. Чому при розв'язанні СЛАР матрично-векторним способом потрібно обертати матрицю коефіцієнтів системи?
6. Що таке мінор, детермінант?
7. Як обчислити матрицю алгебраїчних доповнень?
8. Що є результатом перемноження прямої і зворотної матриць?
9. До чого зводиться процедура множення матриці на вектор та що є його результатом?

Лабораторна робота №2
Прогноз значення викиду шкідливого газу, що приводить його концентрацію в контрольній зоні до встановленого рівня

Мета роботи. Набуття навичок визначення вхідного параметру об'єкта навколишнього середовища, що приводить її вихідний до встановленого рівня, шляхом розв'язання одномірного нелінійного рівняння його математичної моделі.

Виконання лабораторної роботи сприятиме формуванню у здобувачів наступних результатів навчання:

- володіння модельним підходом до об'єктів навколишнього середовища та уміти проводити пошук інформації;
- демонструвати розуміння сутності моделювання, понять й визначень;
- застосовувати нелінійні моделі довкілля у відповідних дослідженнях

Постановка задачі. Концентрація забруднювальних речовин C, мкг/м^3, що вимірюється в повітрі у районі теплової електростанції описується нелінійною одномірною функцією $C = f(P)$ у вигляді полінома третього ступеня, де P – інтенсивність викиду газу з труби, г/с, рис. 1

Потрібно. 1. Побудувати графік вихідної математичної моделі $C = f(P)$ з нанесенням лінії, що відповідає встановленому рівню C_p, із приблизним визначенням області значень викидів $P_{01,2,3}$, де концентрація перевищить його. Зокрема цей рівень може бути гранично допустимою концентрацією, тобто ГДК окису вуглецю.

2. Уточнити значення величини викидів P, при яких концентрація газу досягне значення заданого граничного рівня C_p, шляхом підстановки у вихідне рівняння величини $C = C_p$ і наступного розв'язання отриманого нелінійного рівняння методом послідовних наближень Ньютона (метод дотичних). Виконати 5 ітерацій для обчислення одного з трьох коренів ($P_{01,2,3}$) і визначити досягнуту точність рішення. Оскільки задана модель може мати три корені для уточнення

методом Ньютона обирають один з них, визначивши початкове наближення за побудованим графіком.

3. Одержати послідовно значення трьох коренів рівняння на ЕОМ, задаючи відповідні початкові наближення коренів і зіставити їх з результатом розрахунку, відповідно до методу Ньютона.

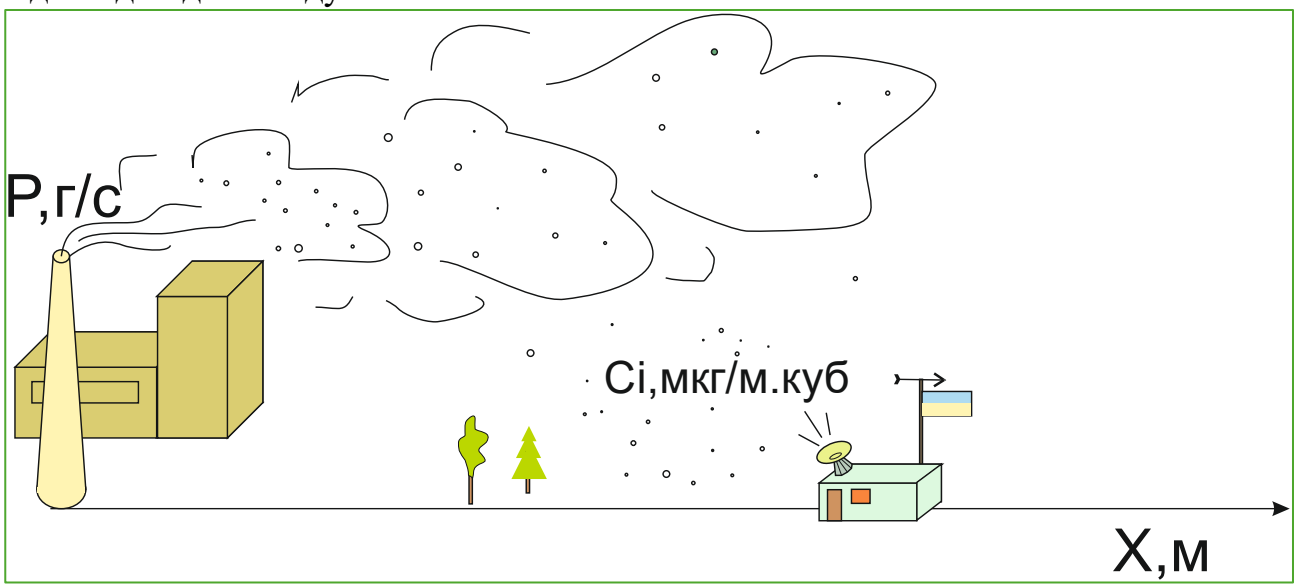


Рисунок 1 – схема до постановки задачі

Зміст звіту:

- постановка задачі;
- рівняння вихідної моделі і значення заданого граничного рівня концентрації забруднювача (ГДК);
- графік відповідно до пункту 1;
- ітераційна таблиця рішення для одного з коренів;
- результати розрахунків коренів на ЕОМ;
- висновки за конкретними результатами розрахунків, показавши для яких значень викидів концентрація газу перевищить встановлений рівень.

Методичні вказівки. Розв'язання одномірного нелінійного рівняння виконується за методом Ньютона.

Суть методу. Маємо модель $C = f(P)$ у вигляді нелінійного одномірного алгебраїчного або трансцендентного рівняння. Треба знайти значення P, які відповідають рівню - C_p, тобто необхідно розв'язати рівняння $C_p = f(P)$ або $f(P) - C_p = \phi(P) = 0$, яке отримують підставленням конкретного значення C_p замість змінної C.

Спочатку отримаємо графічне рішення. Для цього по точках будуємо графік функції $C = f(P)$. Потім проводимо лінію $C = C_p$. Абсциси точок перетину цієї прямої з функцією $C = f(P)$ є коренями рівняння $C_p = f(P)$, тобто шуканими значеннями викидів P_0. Графічне рішення дає приблизне значення коренів, тому уточнюємо його методом Ньютона за ітераційною формулою, поданою у загальному вигляді:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\phi(x_k)}{\phi'(x_k)};\ (k = 0; 1; 2; 3\ldots),$$

де x_k- початкове наближення для кожного шуканого кореню; $\phi(x_k)$ та $\phi'(x_k)$ – відповідно значення функції та її похідної у точці початкового наближення.

Початкове наближення кореня x_0, у нашому випадку викид P_0, обираємо на графіку зліва чи справа від згаданої вище абсциси точки перетину, тобто поблизу точного значення кореню.

В загальному випадку ітерації за формулою Ньютона виконують до виконання умови $\left| x_{k+1} - x_k \right| \leq \varepsilon$, де$\varepsilon$ - задана точність обчислення кореню.

Варіанти: моделей $C = f(P)$ для різних академічних груп:

1. $C = P^3 - 15{,}1 \cdot P^2 + 60{,}4 \cdot P$; $C_p = (30 + N_{var}/1{,}05)$;
2. $C = P^3 - 12{,}1 \cdot P^2 + 39{,}4 \cdot P$; $C_p = (30 + N_{var}/1{,}6)$;
3. $C = P^3 - 10{,}1 \cdot P^2 + 27{,}1 \cdot P$; $C_p = (30 + N_{var}/2{,}5)$,

При ітераціях з обчислення коренів поліному точність розрахунків ε прийняти 0,01.

Рекомендації щодо розв'язання завдання в програмі *MathCAD*

Вносимо вихідні дані згідно номером варіанту та зазначаємо модель у вигляді поліному через функцію *C(p)* за допомогою префікс-оператору *fx* на панелі інструментів *Evaluation* і панелі *Calculator* для введення ступенів поліному, рис. 2

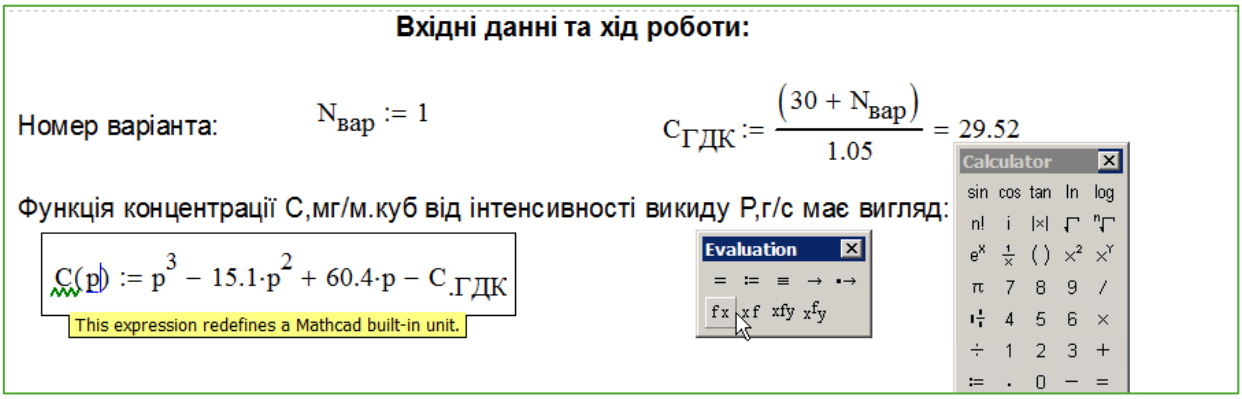


Рисунок 2 – введення вихідних даних та функції полінома

Дана функція є необхідною для подальшої побудови графіку поліному у системі координат *PC* що дозволяє графічно розв'язувати завдання через пошук точок початкового приближення коренів поліному з горизонтальною лінією що відповідає ГДК забруднювальної речовини.

Зазначаємо вільні члени полінома через вектор *P*, починаючи зі значення ГДК і закінчуючи членом з найвищим (третім) ступенем, з урахуванням знаків. Далі знаходимо корені поліному за допомогою оператора *polyroots* (від англ. корні полінома), зазначивши їх через будь-яку змінну, наприклад *r,* рис. 3

З коефіцієнтів цієї поліноміальної функції утворюємо масив даних P:

$$P := \begin{pmatrix} -C_{ГДК} \\ 60.4 \\ -15.1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29.52 \\ 60.4 \\ -15.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Знаходимо корені поліному за допопогою оператору "polyroots":

$$r := \text{polyroots}(P) = \begin{pmatrix} 0.57 \\ 6.47 \\ 8.06 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3 – введення вихідних даних та функції полінома

Таким чином, вектор змінної *r* через виклик оператора *polyroots* виведе від одного до трьох коренів полінома, один з яких має точно співпадати з результатами розрахунку, одержаних методом Ньютона.

Для побудови плоского графіку поліному використовуємо піктограму *X-Y Plot* на панелі інструментів *Graph*, при цьому у лівій області графіку можна через кому перелічити як відображення функції *C(p)* так і коренів поліному $C(r_i)$ як точок перетину поліному з лінією абсцис, що наразі ототожнюється з ГДК, рис. 4.

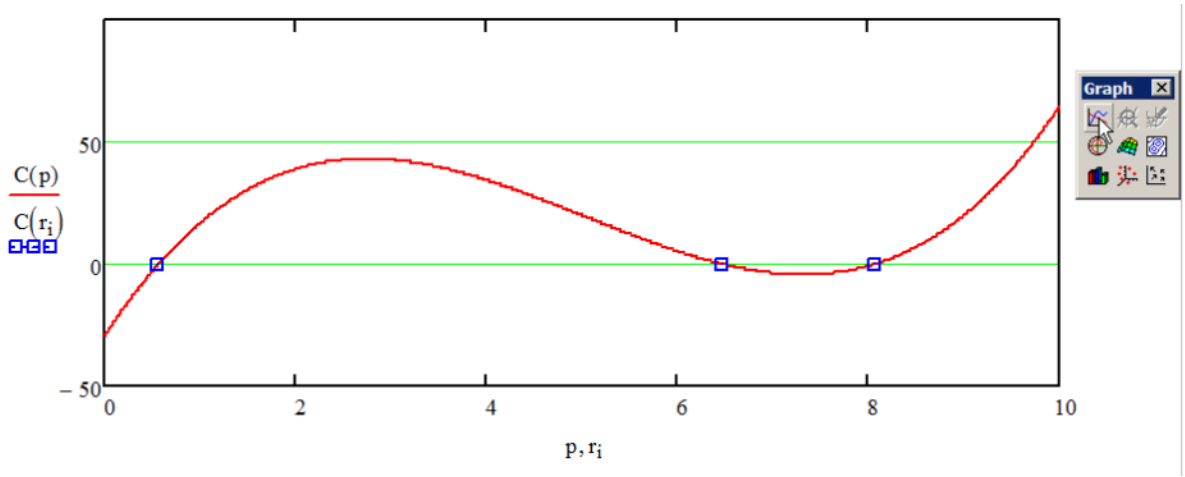


Рисунок 4 – введення графіку полінома та його коренів

Як бачимо з рисунку є діапазони інтенсивності викидів *p* за яких значення концентрацій забруднювальної речовини *C* знаходяться нижче лінії абсцис, тобто не перевищують ГДК. Отже найбільш доцільним є діапазон інтенсивності викидів *p* між другим та третім коренем поліному. Таким чином, можна заформувати наступний висновок за якої інтенсивності викидів краще працювати підприємству:

За результатами аналізу залежності концентрації від інтенсивності викиду рекомендується встановити ТЕЦ рівень викидів у межах від 6,5 до 8 г/с , оскільки саме за такої інтенсивності концентрація забруднювальної речовини у контрольній точці не перевищуватиме допустимий рівень.

Контрольні запитання.

1. До чого з математичної точки зору зводиться процес визначення вхідного параметру об’єкта навколишнього середовища, що приводить його вихідний до встановленого рівня?
2. Як на графіку моделі показати область значень викидів, де прогнозуються концентрації, що перевищують встановлений рівень.?
3. Скільки коренів може мати поліном третього ступеню?
4. Які компоненти входять до складу формули Ньютона, у чому полягає її геометричний смисл?
5. Чи можна назвати формулу Ньютона рекурентною?
6. Яка послідовність розв’язання даної задачі засобами програми MathCAD?
7. Яку функцію виконує оператор *polyroots* в програмі *MathCAD*?

Лабораторна робота №3
Аналіз динаміки чисельності популяції на дискретній моделі

Мета роботи. Набуття навичок дослідження чисельності популяції з використанням дискретної математичної моделі рекурентного типу.

Виконання лабораторної роботи сприятиме формуванню у здобувачів наступних результатів навчання:

- володіння модельним підходом до об'єктів навколишнього середовища та уміти проводити пошук інформації;
- демонструвати розуміння сутності моделювання, понять й визначень;
- застосовувати нелінійні моделі довкілля у відповідних дослідженнях

Постановка задачі. Чисельність популяції певного виду у регіоні залежить від її чисельності у попередній період і описується дискретним аналогом моделі Ферхюльста у вигляді:

$$N_{n+1} = a \cdot N_n(1 - N_n/M),$$

де a - дорівнює числу нащадків, що вижили та припадають на одну особину без урахування факторів, що лімітують;M - параметр, що характеризує ємність місцеперебування популяції.

Потрібно. 1. Виконати розрахунки чисельності особин за рекурентною формулою з числом ітерацій, що визначаються параметром n =0,1,2,3....16 (період ітерації n - година, день, місяць або рік), якщо початкова кількість популяції склала N_0=100. Для варіації значень параметра a у навчальній задачі обчислити його як a = 2+0,1N_{var}, де N_{var} - номер варіанта, а значення M вибрати довільно з ряду: 500, 1000, 2000.

2. Побудувати графік динаміки чисельності у вигляді ламаної функції $N = f(n)$. Визначити її характер, період та тривалість циклів при їхній наявності.

Період циклу встановлюють як ціле число n між подібними сталими максимумами або мінімумами дискретної функції $N = f(n)$.

3. Одержати послідовно розв'язки рівняння Ферхюльста з використанням ПЕОМ для випадку a:=a +1; нанести отримані дані на загальний графік і зіставити з попередніми розрахунками, указавши характер зміни чисельності та цикли.

4. Аналогічно п. 3 одержати розв'язки для альтернативного рівняння чисельності

$$N_{n+1} = a \cdot N_n exp(-\beta N_n),$$

де β - коефіцієнт, що характеризує ємність екологічного місцеперебування популяції. Прийняти $\beta = 1/M$; a:=a +5 (без обмеження спільності можна прийняти $\beta = 1$, тоді отримаємо відносну чисельність, яка буде більше реальної у β раз). Побудувати графік та порівняти його з попереднім.

Зміст звіту:

- постановка задачі;
- рівняння вихідної моделі відповідно з варіантом;
- таблиця ітерацій за зазначеною схемою;
- графічна інтерпретація рішення;
- результати розрахунків на ЕОМ;
- висновки за конкретними результатами розрахунків чисельності і характеру динаміки на різних моделях.

Методичні вказівки. Визначення чисельності популяції за поданими формулами проводять, як при розв'язанні рівнянь виду $x = \phi(x)$ методом простих ітерацій, тобто задають початкове значення x_0, підставляють його в праву частину рівняння та обчислюють перше значення $x_1 = \phi(x_0)$, потім друге, – підстановкою у праву частину попередньо отриманого першого значення:$x_2 = \phi(x_1)$ і так далі до $x_{к=1} = \phi(x_к)$, де k =0, 1, 2....– число ітерацій рекурентної залежності (параметр, аналогічний n).

Приклад розрахунку: нехай $a = 3;\ M = 1000;\ N_0 = 100$.

Тоді маємо наступну динаміку чисельності популяції на відповідний рік:

$$N_1 = 3 \cdot 100(1 - 100/100\ 0) = 270$$
$$N_2 = 3 \cdot 270(1 - 270/100\ 0) = 591$$
$$N_3 = 3 \cdot 591(1 - 591/100\ 0) = 724$$
$$N_4 = 3 \cdot 724(1 - 724/100\ 0) = 598$$
$$N_5 = 3 \cdot 598(1 - 598/100\ 0) = 721$$
$$-\ //\ -$$

і так далі…

В даному випадку для автоматизації розрахунків на основі рекурентних формул доцільно використовувати програмне забезпечення, що підтримає циклічні операції.

Рекомендації щодо розв'язання завдання в програмі *MathCAD*

Вносимо вихідні дані з урахуванням номеру варіанту та довільної величини ємності місцеперебування популяції *M*. Для застосування рекурентної функції вносимо змінну *n* що уявляє собою множину (масив) цілочисельних значень від 0 до 15. При цьому застосовуємо піктограму *Range Variable* на панелі інструментів *Matrix*, рис. 1

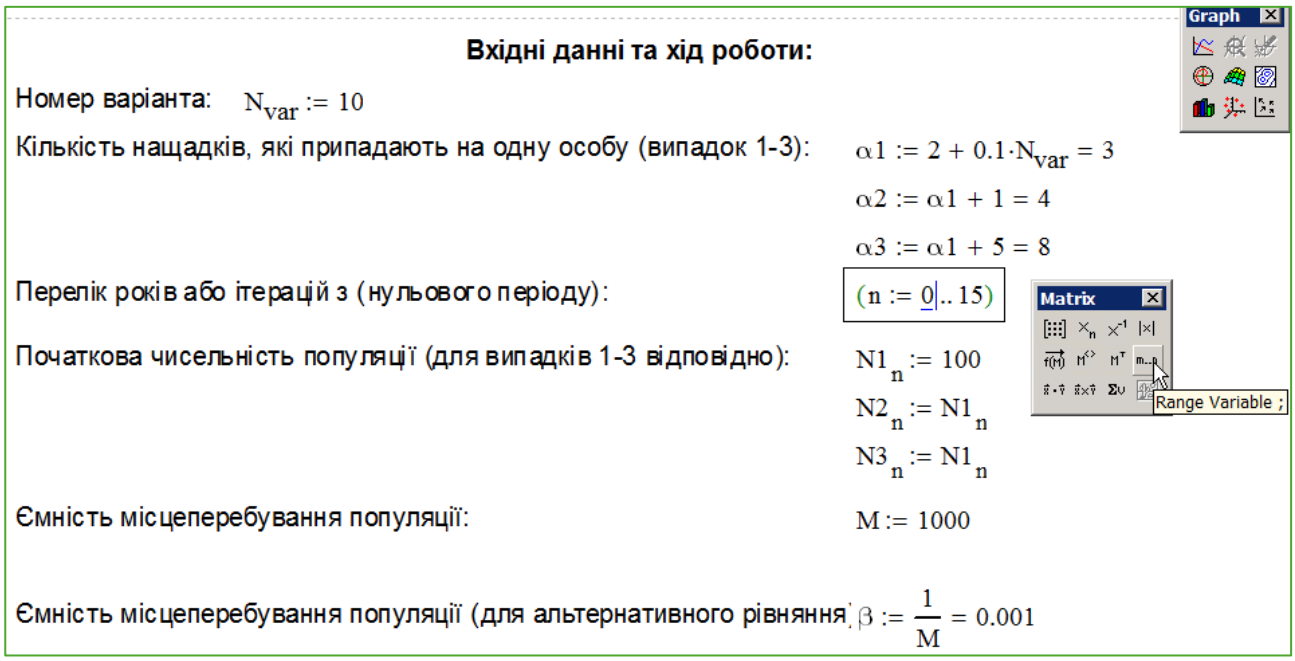


Рисунок 1 – введення вихідних даних

Заносимо формули для побудови рекурентних моделей за різних коефіцієнтів *α* та альтернативного рівняння Ферхюльста, при цьому індекси n та n+1 заносимо за допомогою піктограми x_n *(Subscript)* що на панелі інструментів *Matrix,* рис. 2

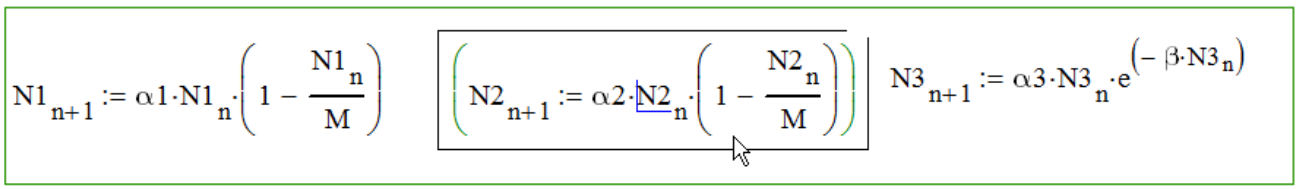


Рисунок 2 – введення рівнянь Ферхюльста

Нижче будуємо графік динаміки чисельності популяції за різними умовами. Щоб відобразити на одному зображені усі три необхідні моделі підчас побудови ліворуч на графіку (де вісь ординат) перелічуємо через кому значення $N1_n$, $N2_n$ та $N3_n$, ставимо на вісь абсцис зміну *n,* рис. 3

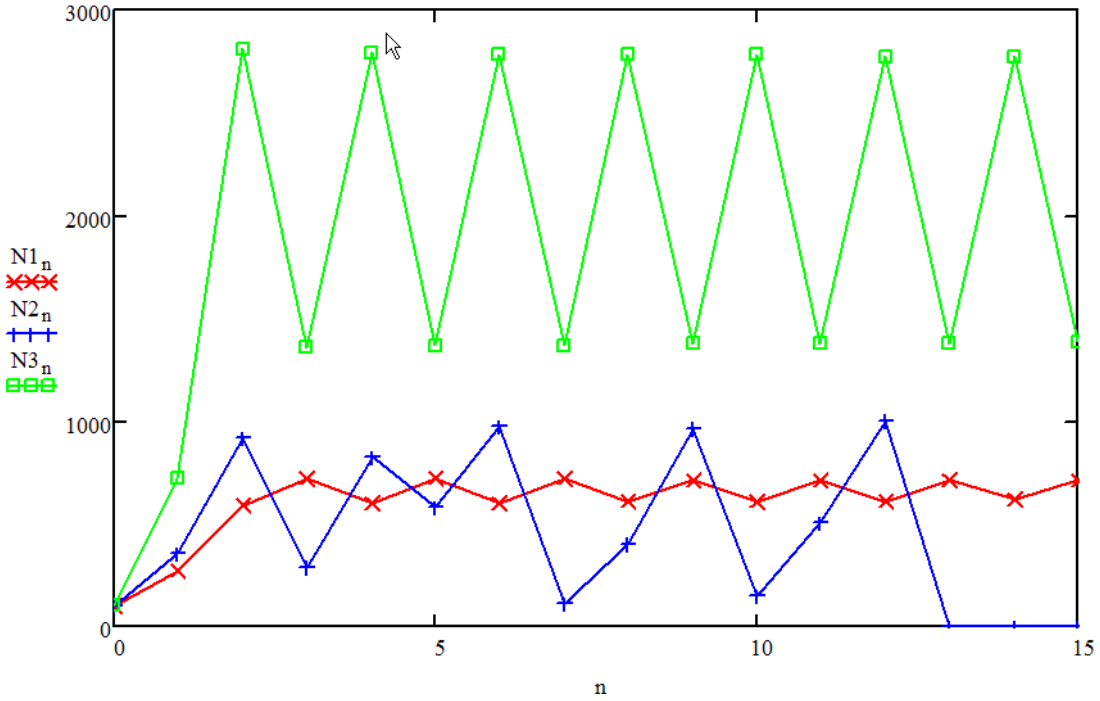


Рисунок 3 – виведення графіків динаміки чисельності популяції

Даний графік дозволяє проаналізувати динаміку популяції дослідженого виду за різних вихідних даних. Підчас опису динаміки у висновках необхідно відзначити час на який припадає максимальна кількість представників виду для кожного графіку, відзначити період корегування або стабілізації , вказати період коливань (роки) та їх амплітуду (осіб), відмітити період занепаду популяції якщо це має місце.

Варто зауважити що підчас змін вихідних даних буде негайно здійснюватися перерахунок значень на графіку, що дозволяє розуміти та «відчувати» вплив певного коефіцієнту на характер динаміки популяції.

Для отримання точних результатів розрахунку у вигляді таблиці в даному випадку необхідно лише запросити значення *N1, N2* та *N3* через знак = , рис. 4.

N1 =

	0
0	100
1	270
2	591.3
3	724.993
4	598.135
5	721.109
6	603.333
7	717.967
8	607.471
9	715.35
10	610.873
11	713.121
12	613.738
13	711.191
14	616.195
15	709.496
16	618.334

N2 =

	0
0	100
1	360
2	921.6
3	289.014
4	821.939
5	585.421
6	970.813
7	113.339
8	401.974
9	961.563
10	147.837
11	503.924
12	999.938
13	0.246
14	0.985
15	3.936
16	15.682

N3 =

	0
0	100
1	723.87
2	2807.875
3	1355.261
4	2795.957
5	1365.689
6	2788.243
7	1372.467
8	2783.152
9	1376.953
10	2779.752
11	1379.956
12	2777.461
13	1381.981
14	2775.91
15	1383.353
16	2774.856

Рисунок 4 – виведення графіків динаміки чисельності популяції

Результати розрахунків можна експортувати до різних форматів як от *.xls* для подальшої роботи в програмі *MS Excel*, рис. 5

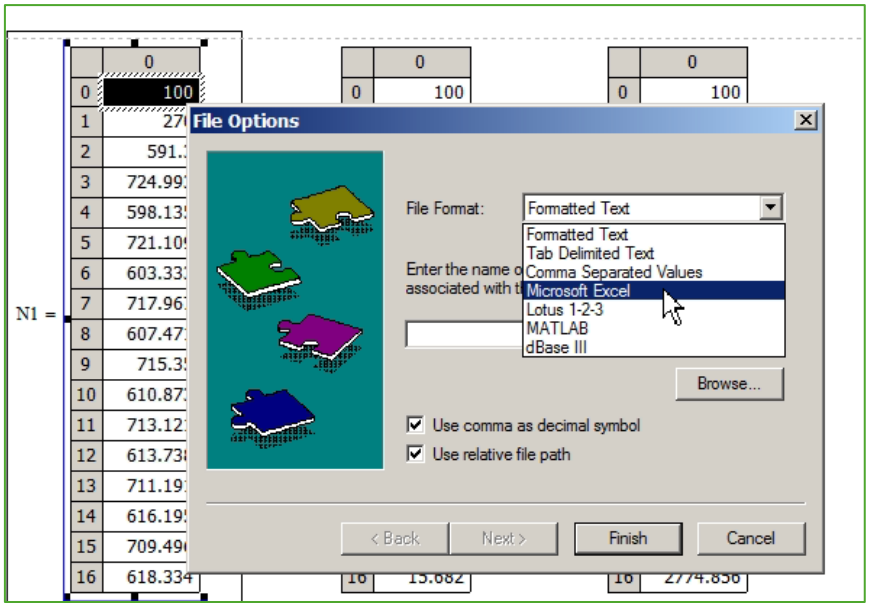


Рисунок 5 – експорт результатів розрахунків до електронних таблиць

Контрольні запитання.

1. У чому полягає суть рекурентної залежності популяційних процесів?
2. Який параметр приведених дискретних популяційних моделей найбільше впливає на характер зміни чисельності особин у часі?
3. При яких значеннях числа нащадків, що припадають на одну особину, буде спостерігатися вимирання популяції ?
4. Як параметр, що характеризує ємність місцеперебування популяції, впливає на застосовність формули Ферхюльста?
5. Як впливає зростання числа нащадків на характер чисельності популяції?

Лабораторна робота №4
Визначення значень факторів гірничого об'єкта, що приводять концентрацію шкідливих речовин у контрольній зоні до рівня ГДК

Мета роботи. Набуття навичок дослідження багатомірних моделей шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь чисельним методом Ньютона.

Виконання лабораторної роботи сприятиме формуванню у здобувачів наступних результатів навчання:

- володіння модельним підходом до об'єктів навколишнього середовища та уміти проводити пошук інформації;
- застосовувати нелінійні моделі довкілля у відповідних дослідженнях
- моделювати й прогнозувати забруднення атмосфери в зоні розташування промислових підприємств з використанням інформаційних технології та ресурсів Інтернету про досліджувані території

Постановка задачі. Вміст двооксидів сірки SO_2 та вуглецю CO_2 у контрольному пункті фабрики огрудкування (де виробляють окатиші – продукт первинної підготовки руди) залежить від продуктивності агрегатів огрудкування Q, т/доб. і швидкості вітру v, м/с, взаємозв'язок яких представлений неявно моделлю у вигляді системи нелінійних рівнянь

$$C_1 = \phi 1(Q, v)$$
$$C_2 = \phi 2(Q, v),$$

причому ГДК двоокисів сірки SO_2 - C^*_1 та вуглецю CO_2 - C^*_2 можуть бути досягнуті при різних співвідношеннях Q і v.

Після підставлення значень ГДК у систему рівнянь одержимо нову систему

$$C^*_1 = \phi 1(Q, v)$$
$$C^*_2 = \phi 2(Q, v),$$

яку приводять до канонічного виду

$$f1(Q, v) = 0$$
$$f2(Q, v) = 0.$$

Потрібно. Визначити, при яких величинах продуктивності агрегату – Q,т/доб і швидкості вітру v, м/с у контрольному пункті будуть досягнуті ГДК зазначених двоокисів одночасно, тобто розв’язати систему нелінійних рівнянь, подану у канонічному вигляді (згідно з варіантом).

Порядок виконання роботи. 1. Привести модель до вигляду, зручного для побудови графіків, і побудувати по черзі графіки рівнянь вихідної моделі у координатах Q і v, . Визначити, приблизно, координати точки перетинання заданих функцій моделі, визначивши початкове наближення коренів, тобто виконати їхнє графічне відділення.

2. Уточнити значення коренів Q і v, тобто величин, при яких концентрації шкідливих речовин досягнуть значення ГДК, шляхом розв'язання системи нелінійних рівняння методом послідовних наближень Ньютона у векторно-матричній формі. Виконати одну-дві ітерації.

3. Одержати значення коренів системи рівнянь за допомогою ЕОМ, наприклад з використанням пакета *MathCAD*, і зіставити Їх з результатом розрахунку методом Ньютона.

Зміст звіту:

- постановка задачі;
- вихідна математична модель у канонічній формі;
- графіки рівнянь, що входять до моделі;
- рішення за ітераційною формулою Ньютона;
- результати розрахунків на ЕОМ;
- висновки за конкретними результатами розрахунків.

Методичні вказівки. Суть методу розв’язання системи рівнянь, поданої у векторно-матричній формі, як $\overline{f}(P, v) = 0$ або $\overline{f}\left(\overline{x}\right) = 0$.

Розв’язати систему рівнянь цієї моделі можна чисельним методом Ньютона за ітераційною формулою

$$\overline{x_{k+1}} = \overline{x_k} - W^{-1} \times \overline{f}\left(\overline{x_k}\right),$$

де W^{-1} - зворотна матриця Якобі, яку отримують від $\overline{f}\left(\overline{x}\right)$ у точці початкового наближення у вигляді числової матриці $W = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \dots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}_{Xo}$.

Для визначення цієї матриці беруть від кожної функції відповідні часткові похідні та обчислюють їх значення підстановкою координат точки початкового наближення.

Розглянемо алгоритм розв'язання системи двох рівнянь з двома невідомими у векторно-матричній формі.

Крок 1. Вибрати початкове наближення $\bar{x}_0 = (x_{10}; x_{20})$, користуючись побудованим графіком функцій $f1(x_1, x_2)$ та $f2(x_1, x_2)$, поблизу точки їх перетинання.

Крок 2. Знайти частинні похідні функцій$f1(x_1, x_2)$ та$f2(x_1, x_2)$ та скласти матрицю Якобі $W = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{vmatrix}$.

Крок 3. Обчислити $f1(x_1, x_2)$ та$f2(x_1, x_2)$ у точці початкового наближення шляхом підстановки $x_{10}; x_{20}$.

Крок 4. Отримати числову матрицю Якобі шляхом підстановки координат точки початкового наближення $\bar{x}_0 = (x_{10}; x_{20})$.

Крок 5. Обернути матрицю Якобі за формулою

$W^{-1} = \frac{1}{det\, W} |W_T^*|$,

де $det\, W$ - детермінант, або визначник матриці; $|W_T^*|$ - транспонована матриця алгебраїчних доповнень.

Крок 6. Підставити у формулу Ньютона вектор початкового наближення і W^{-1}. Обчислити наступне наближення.

Крок 7. Перевірити умову $|\overline{x_{k+1}} - \overline{x_k}| \le \varepsilon$. Якщо умова виконується, вивести результат, якщо ні, то перейти до кроку 3 .

Приклад. Розв'язати систему нелінійних рівнянь

$$f1(x_1, x_2) = x_1 + 3\, lg\, x_1 - x_2^2 = 0$$

$f2(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1 \cdot x_2 - 5x_1 + 1 = 0.$

Крок 1. Початкове наближення $\bar{x}_0 = (3{,}4;\ 2{,}2)$.

Крок 2. Отримуємо матрицю Якобі $W = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + 1{,}32/x_1 & -2x_2 \\ 4x_1 - x_2 - 5 & x_1 \end{vmatrix}$.

Крок 3. Обчислюємо

$f1(x_1, x_2) = x_1 + 3\, lg\, x_1 - x_2^2 = 3{,}4 + 3\, lg\, 3\,, 4 - 2, 2^2 = 0{,}154;$ $f2(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1 \cdot x_2 - 5x_1 + 1 = 2 \cdot 3, 4^2 - 3{,}4 \cdot 2{,}2 - 5 \cdot 3{,}4 + 1 = -0{,}36.$

Крок 4. Записуємо числову матрицю Якобі шляхом підставлення координат точки початкового наближення у якобіан $W(\bar{x}_0)=\begin{vmatrix}1{,}38 & -4{,}4\\ 6{,}4 & -3{,}4\end{vmatrix}$.

Крок 5. Обертання матриці. Обчислюємо детермінант: $det\,W$=-4,7+28,1=23,4; послідовно знаходимо транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень:

$$\begin{vmatrix}1{,}38 & -4{,}4\\ 6{,}4 & -3{,}4\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}-3{,}4 & -6{,}4\\ 4{,}4 & 1{,}38\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}-3{,}4 & 4{,}4\\ -6{,}4 & 1{,}38\end{vmatrix};\ W^{-1}=\frac{1}{23{,}4}\begin{vmatrix}-3{,}4 & 4{,}4\\ -6{,}4 & 1{,}38\end{vmatrix}.$$

Крок 6. Обчислюємо наступне наближення підставленням у формулу Ньютона вектору початкового наближення і W^{-1}:

$$\overline{x_1}=\begin{vmatrix}3{,}4\\ 2{,}2\end{vmatrix}-\frac{1}{23{,}4}\begin{vmatrix}-3{,}4 & 4{,}4\\ -6{,}4 & 1{,}38\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0{,}154\\ -0{,}36\end{vmatrix};$$

x_{11}=3,4-1/23,4[(-3,4)0,154+4,4(-0,36)]=3,49;

x_{21}=2,2-1/23,4[(-6,4)0,154+1,38(-0,36)]=2,26.

Крок 7. Перевіряємо умову

[3,49-3,4]=0,09≤ ε;

[2,26-2,2]=0,06≤ ε.

Якщо умова виконується, виводимо результат, якщо ні, то переходимо до кроку 3 .Оскільки в роботі запропоновано виконати одну або дві ітерації, умову не перевіряють, а визначають фактично отриману похибку ε.

Варіанти:

1. $f1(x_1,x_2)=x_1+3\,lg\,x_1-x_2^2-0{,}2\cdot a=0$

$f2(x_1,x_2)=2x_1^2-x_1\cdot x_2-5x_1+1-a=0$;

2. $f1(x_1,x_2)=x_1+3\,lg\,x_1-x_2^2-0{,}1\cdot a=0$

$f2(x_1,x_2)=2x_1^2-x_1\cdot x_2-5x_1+1-a=0$,

де $a=N_{var}$.

Примітка. Десятковий логарифм доцільно замінити натуральним!

Рекомендації щодо розв'язання завдання в програмі *MathCAD*

Заносимо вихідні данні та рівняння функцій f(CO) та f(SO_2), рис.1

Номер варіанта: $N_{вар}:=1$ Коефіцієнт рівняння $a:=N_{вар}$

Підставляємо коефіцієнт a до вхідної системи рівнянь та отримаємо відповідні функції:

$f_{CO}(q,v):=q+3\cdot\ln(q)-v^2-0.2\cdot a$

$f_{SO2}(q,v):=2\cdot q^2-q\cdot v-5\cdot q+1-a$

Рисунок 1 – введення вихідних даних та функцій концентрацій газів

Спрощуємо систему рівнянь через скорочення в них змінної швидкості *v*, рис. 2*:*

$$v_{CO}(q):=\sqrt{q+3\cdot\ln(q)-a}$$

$$v_{SO2}(q):=2\cdot q-5+\frac{(1-a)}{q}$$

Рисунок 2 – спрощення функцій через змінну швидкості *v*

Будуємо графіки функцій в системі координат *q,v*, рис. 3

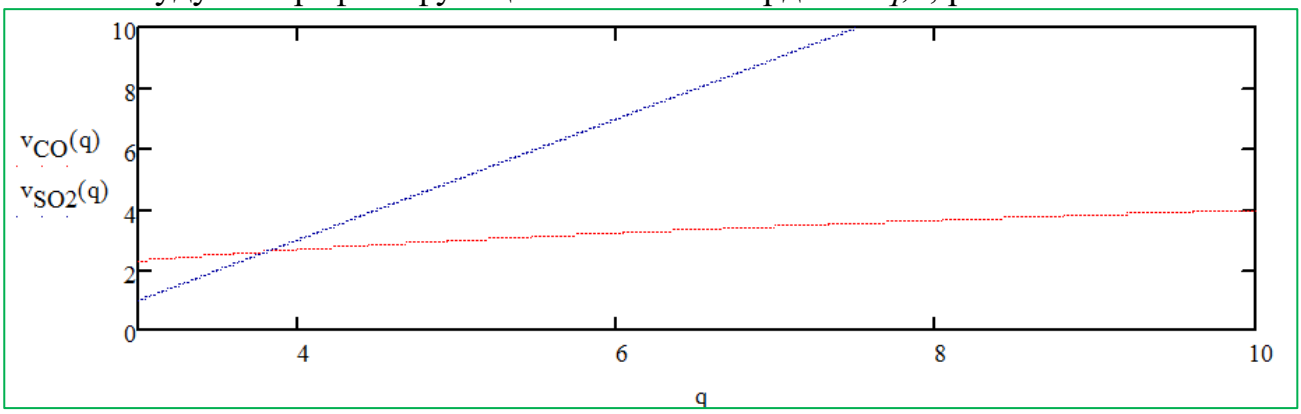


Рисунок 3 – побудова графіків функцій концентрацій газів

Визначаємо га графіку в системі координат *q* точку початкового приближення та вирішуємо рівняння за допомогою команд *Given* та *Find*, рис. 4

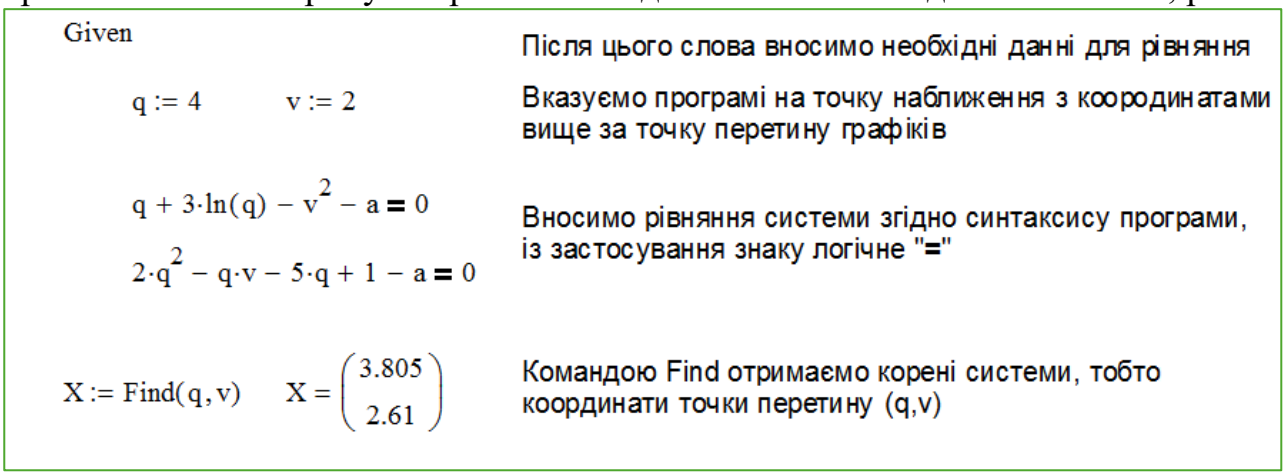


Рисунок 4 – розв'язання системи нелінійних рівнянь

Контрольні запитання.

1. Як на його багатомірній моделі можна визначити параметри об'єкту, що забезпечать необхідний рівень ГДК забруднюючих речовин, що викидаються ним у навколишнє середовище?
2. Скільки параметрів має запропонована модель?
3. Чим відрізняється одномірна формула Ньютона від формули для пошуку коренів системи нелінійних рівнянь ?
4. Що являє собою матриця Якобі?
5. У чому полягає процес транспонування матриці?
6. Як визначають точність, досягнуту у ітераційному процесі обчислення коренів?

Лабораторна робота №5
Визначення екстремальних значень концентрації пилу в повітрі за фактором швидкості вітру

Мета роботи. Набуття навичок дослідження нелінійних об'єктів на наявність екстремуму та його визначення на математичній моделі.

Виконання лабораторної роботи сприятиме формуванню у здобувачів наступних результатів навчання:

- демонструвати розуміння сутності моделювання, понять й визначень;
- застосовувати нелінійні моделі довкілля у відповідних дослідженнях;
- застосовувати стохастичні моделі довкілля та програмні засоби їх побудови і аналізу для інформаційного забезпечення досліджень.

Постановка задачі. Концентрація пилу C, мг/м^3 при планувальних роботах на відвалі кар'єру поблизу бульдозера за вітром неоднозначно залежить від швидкості повітряного потоку. Спочатку зростання швидкості вітру приводить до зниження концентрації за рахунок інтенсивного виносу, а потім зростає в результаті здіймання вже осілого пилу. Модель процесу можна формально описати нелінійною одномірною функцією $C = \phi(v)$у вигляді полінома другого ступеня з екстремумом (мінімумом), де v швидкість вітру поблизу поверхні ґрунту, м/с.

Потрібно визначити швидкість вітру, за якою концентрація пилу буде або мінімальною.

Порядок виконання 1. Побудувати графік вихідної моделі. Визначити орієнтовно інтервал розміщення мінімуму функції моделі, тобто виконати графічну локалізацію екстремуму.

2. Уточнити величину v - швидкості вітру, за якою концентрація пилу буде мінімальною й обчислити її чисельним методом дихотомії. Виконати 5 ітерацій і визначити досягнуту точність розв’язку.

3. Одержати екстремальне значення концентрації та швидкості вітру що їй відповідає за допомогою ЕОМ у програмі *MathCAD* та зіставити результати з ручним розрахунком. Перевірити отримані рішення з аналітичним розв’язанням цієї ж задачі шляхом дорівнювання нулю похідної від функції $C = \phi(v)$.

Зміст звіту:

- постановка задачі;
- рівняння вихідної моделі;
- графік відповідно до пункту 1;
- схема алгоритму дихотомії
- ітераційна таблиця рішення;
- результати аналітичного розв’язку та розрахунків на ЕОМ;
- висновки за конкретними результатами розрахунків екстремумів з оцінкою точності їхнього обчислення.

Методичні вказівки. Для визначення мінімуму одномірної функції $y = f(x)$ на інтервалі $|a; b|$ рекомендується застосувати алгоритм методу дихотомії, що наведений нижче, причому у разі необхідності знайти максимум, знак функції змінюють на зворотній, тобто пошук ведуть за тим же алгоритмом, але досліджують функцію$y = -f(x)$ на тому ж інтервалі.

Крок 1. Перевірити умову $|a - b| \leq \varepsilon$. Якщо умова виконується, – до кроку 6. Якщо ні, – до кроку 2.

Крок 2. Поділити інтервал $|a;b|$ навпіл та обчислити два значення аргументу: $x_1 = (a+b-\varepsilon)/2$; $x_2 = (a+b+\varepsilon)/2$.

Крок 3. У визначених точках обчислити значення функції $y_1 = f(x_1)$ та $y_2 = f(x_2)$.

Крок 4. Перевірити умову $f(x_1) > f(x_2)$. Якщо умова виконується $x_1 \Rightarrow a$ та до кроку 2, якщо не виконується, – до кроку 5.

Крок 5. Позначити $x_2 \Rightarrow b$ та – до кроку 2.

Крок 6. Вивести результат: $x_m = \frac{a+b}{2}$; та $y_m = f(x_m)$ як екстремальні значення параметрів.

Приклад. Знайти чисельним методом дихотомії мінімум функції $y = 28{,}8 - 0{,}274x + 0{,}00093x^2$ з похибкоюε =2.

Орієнтуючись на графік функції, або положення точки, де похідна функції дорівнює нулю, локалізуємо мінімум на інтервалі: $|a = 120; b = 170|$, який бажано обрати не симетрично відносно мінімуму.

Крок 1. Перевіряємо умову $|120 - 170| \leq 2$. Умова не виконується, – до кроку 2.

Крок 2. Ділимо інтервал $|120; 170|$ навпіл та обчислюємо два значення аргументу: $x_1 = (120 + 170 - 2)/2$=144; $x_2 = (120 + 170 + 2)/2$=146.

Крок 3. У визначених точках $y_1 = f(x_1)$=8,628; $y_2 = f(x_2)$=8,62.

Крок 4. Оскільки $f(x_1) = 8{,}628 > f(x_2) = 8{,}62$, $x_1 \Rightarrow a$ =144 та до кроку 1, тобто згідно з кроком 1 перевіряємо умову $|144 - 170| \leq 2$. Точність не досягнута – продовжуємо обчислення за алгоритмом.

В результаті ряду ітерацій на кроці 6 отримаємо екстремальні значення параметрів: $x_m = \frac{a+b}{2}$=147,3; та $y_m = f(x_m)$=8,618 .

Варіанти: формують на основі моделі $C = a_0 - a_1 \cdot v + a_2 \cdot v^2$, де коефіцієнти визначити як a_0 =5N_{var}; a_1=4+0,1N_{var};a_2=1+0,01N_{var}.

Рекомендації щодо розв'язання завдання в програмі *Mathcad*

Визначаємо коефіцієнти рівняння a_0, a_1 та a_2 на основі вихідних даних до роботи, рис. 1



Рисунок 1 – введення вихідних даних

Записуємо у загальному вигляді функцію C(v) та підставляємо числові значення a_0, a_1 та a_2 за допомогою піктограми *Evaluate Symbology*, що на панелі інструментів *Evaluation Toolbar*, рис. 2

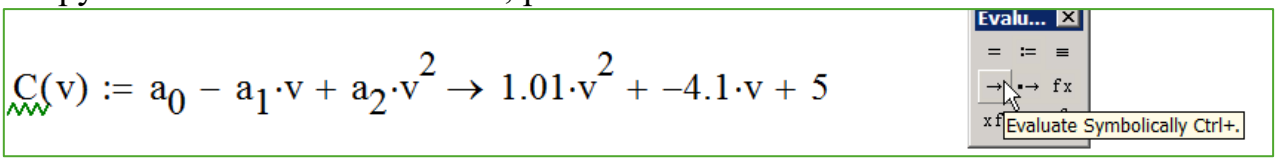


Рисунок 2 – введення функції *C(v)* із підстановкою значень

Будуємо графік залежності концентрації пилу *C* від швидкості вітру *v*, рис. 3

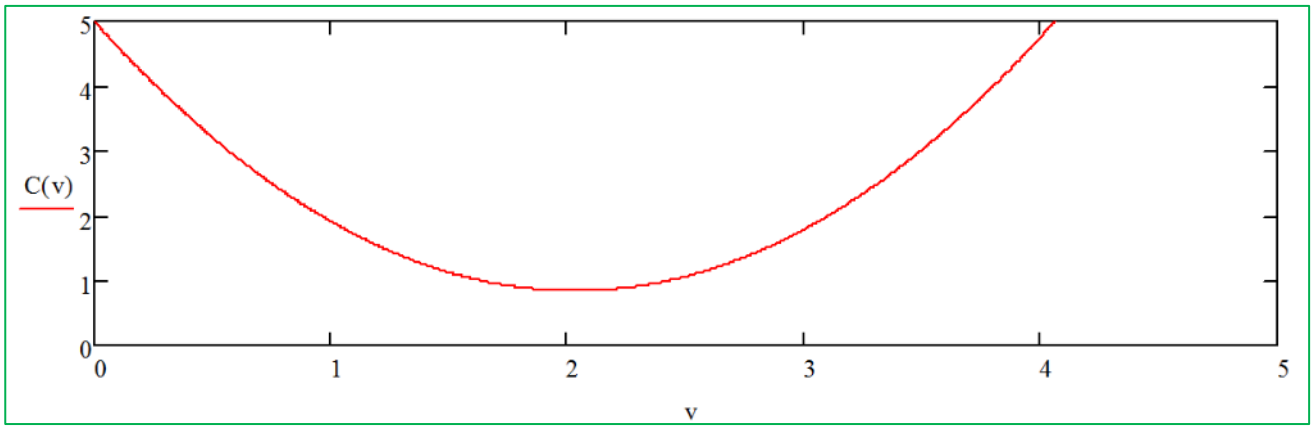


Рисунок 3 – графік концентрації пилу *C* від швидкості вітру *v*

На графіку локалізуємо інтервал із екстремальним значенням (мінімумом) концентрації в даному випадку для швидкості вітру від 1 до 3 м/с при округленні до цілих значень.

Вказуємо точку початкового приближення (будь-яке значення *v*), та за допомогою оператора *Minimize* знаходимо мінімум функції *C(v)*, рис. 4

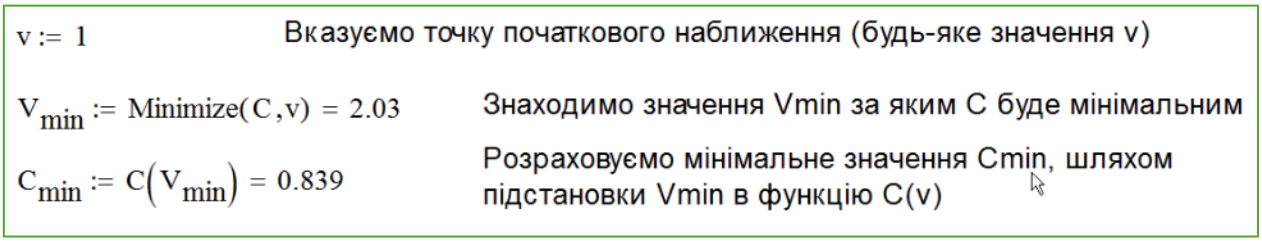


Рисунок 4 – пошук значення швидкості вітру за якою концентрація пилу буде мінімальною

Для розв'язання даного завдання суто аналітичним шляхом необхідно взяти похідну функції та прирівнявши до нуля отримане лінійне рівняння визначити його корінь який і буде мінімумом функції *C(v)*.

Для аналітичного рішення засобами програми Mathcad беремо похідну функції за допомогою команди *Symbolics\Variable\Differentiate*. Після чого маємо фрагмент для лінійного рівняння який прирівнюємо до нуля через піктограму *Equal to* (=) на панелі інструментів *Boolean*.

Перед рівнянням ставимо оператор *Given*, для вказання умов пошуку, після рівняння – оператор *Find(v),* який повертає єдине для лінійного рівняння значення, рис. 4

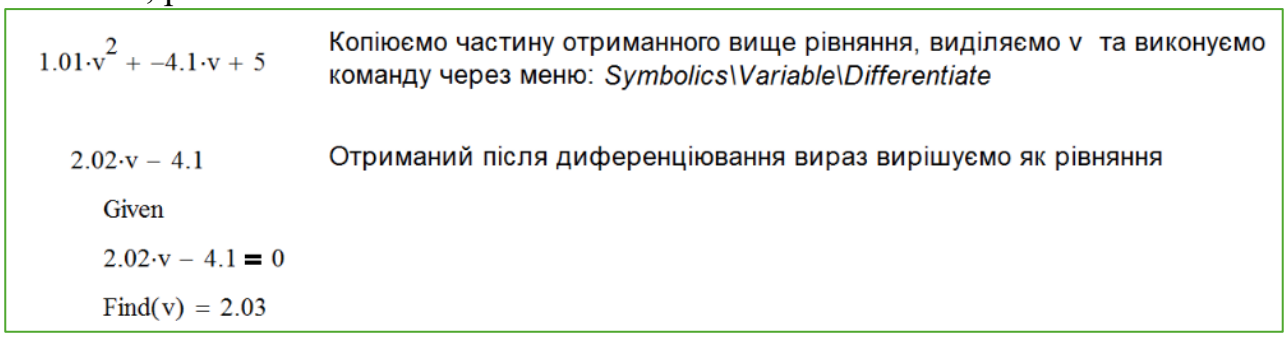


Рисунок 5 – графік концентрації пилу *C* від швидкості вітру *v*

Отже це рівняння має єдиний корінь який і дорівнює екстремуму (мінімуму) функції.

Таким чином за результатами розрахунків можна рекомендувати проводити планувальні роботи на породному відвалі при швидкості вітру біля 2 м/с, оскільки саме за такої швидкості концентрація пилу буде мінімальною.

Контрольні запитання.

1. Що спричиняє неоднозначність зміни концентрації пилових часток у приземному шарі при поступовому зростанні швидкості вітру?
2. Скільки екстремумів має запропонована модель ?
3. Яке значення має похідна функції у точці екстремуму ?
4. Які переваги мають чисельні методи пошуку екстремумів функцій, порівняно з аналітичними?
5. Як можна на практиці відділити екстремум?
6. У чому полягає сутність чисельного методу дихотомії?
7. Що треба зробити для визначення максимуму функції за алгоритмом пошуку мінімуму?
8. Як визначити точність обчислення екстремуму, досягнуту після певного числа ітерацій ?

Лабораторна робота №6
Побудова регресійної моделі, що встановлює залежність росту зеленої маси лісопосадки від річних опадів

Мета роботи. Набуття навичок побудови моделей регресії за даними моніторингу навколишнього середовища шляхом їх апроксимації за методом найменших квадратів.

Виконання лабораторної роботи сприятиме формуванню у здобувачів наступних результатів навчання:

- володіти модельним підходом до об'єктів навколишнього середовища та уміти проводити пошук інформації;

- демонструвати розуміння сутності моделювання, понять й визначень;
- застосовувати існуючу систему динамічних моделей процесів біосфери й людської активності.

Постановка задачі. Приріст зеленої маси в лісопосадці - B , т/гектар залежить від величини річних опадів W, мм/рік. У результаті спостережень отримані статистичні дані по роках, що представляються у вигляді кореляційної таблиці, наприклад:

W_i, мм/рік	140	220	360	410	500
B_i , т/гектар	900	1700	3100	3300	3500

Примітка. Варіант для кожного студента задається індивідуально, наприклад, у вигляді ескізного поля кореляції, точки якого наносяться викладачем, орієнтуючись на приведені у таблиці, після чого студент самостійно обробляє ескізний графік, заносячи дані у свою кореляційну таблицю.

Потрібно. Установити залежність $B = f(W)$ між двома контрольованими параметрами середовища у вигляді, наприклад, прямої лінії регресії $B = a \cdot W + b$, а також рівень опадів, що прогнозує посуху, тобто рівень опадів, за умов яких $B = f(W_0)$ дорівнюватиме нулю.

Порядок виконання. 1. За даними кореляційної таблиці побудувати поле кореляції у вигляді точкового графіка функції $B_i = f(W_i)$; з'єднати точки ламаною лінією й упевнитися у можливості побудови моделі у вигляді прямої лінії регресії .

2. Розрахувати числові характеристики обох випадкових величин.

3. Визначити коефіцієнт парної лінійної кореляції між параметрами.

4. Обчислити коефіцієнти лінійного рівняння за алгоритмом методу найменших квадратів, записати отриману математичну модель та нанести її на поле кореляції. Оцінити за моделлю величину опадів W_0, що відповідають посусі як точку перетинання прямої з віссю абсцис, тобто знайти корінь лінійного рівняння W_0.

5. Розрахувати на ЕОМ коефіцієнти лінії регресії у вигляді прямої або іншої підходящої лінії, наприклад параболи, обчислити відповідні значення W_0 та зіставити результати з ручним розрахунком. Уточнити W_0. Для цього отримане рівняння, наприклад у вигляді прямої $B = a \cdot W + b$ з певними коефіцієнтами, наносять на поле кореляції та шукають приблизно точку перетинання функції з віссю абсцис, що відповідає посусі, а потім її уточнюють, тобто шукають Wпри B =0 шляхом обчислення кореню рівняння прямої. Аналогічно поступають з моделями іншого виду. Зрівнюють результати моделювання та обирають найбільш прийнятну модель.

Зміст звіту:

- постановка задачі;
- вихідна кореляційна таблиця;
- числові характеристики випадкових величин;

- отримана модель;

- результати розрахунків на ЕОМ;

- висновки за конкретними результатами розрахунків з якісною оцінкою їх достовірності.

Методичні вказівки. Роботу виконують за типовим порядком побудови регресійної моделі за експериментальними чи статистичними даними:

1. Знаходять числові характеристики усіх випадкових величин $x_i ; y_i \ldots .$, відповідно до формул, приведених нижче:

- математичне сподівання $M = \sum_{1}^{n} p_i x_i$, яке частіше подають у вигляді середнього арифметичного значення випадкової величини

$$M = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i \ ,$$

де n - число обраних значень;

- дисперсія $D_x = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right)^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{1}^{n} x_i \right)^2}{n} \right]$;

- середньоквадратичне відхилення $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Примітка. Числові характеристики інших змінних обчислюють аналогічно

2. Дають оцінку взаємного зв’язку пар випадкових величин (параметрів, що спостерігаються і ставляться в залежність один від одного) для підтвердження лінійної залежності між ними за допомогою коефіцієнта парної лінійної кореляції

$$r = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \ ,$$

де в чисельнику - кореляційний момент, що обчислюється за формулою

$$K_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right) \left(y_i - \overline{y} \right) = \frac{1}{n} \left[\sum_{1}^{n} x_i \cdot y_i - \frac{\left(\sum_{1}^{n} x_i \cdot \sum_{1}^{n} y_i \right)}{n} \right] .$$

Значення $r = \left| 0{,}7 - 1 \right|$ свідчать про сильний зв'язок між величинами, що контролюються, при якому доцільно будувати залежність у вигляді наближеної функції.

3. Будують модель залежності, що може бути представлена лінійною чи нелінійною функцією. Вид шуканої моделі визначають відповідно до гіпотези, що висувають за характером розташування експериментальних точок кореляційної таблиці, нанесених на поле кореляції.

Наближення моделей виконують методом найменших квадратів.

Випадок лінійної залежності. Нехай наближене теоретичне рівняння зв'язку двох параметрів бажано знайти у вигляді $y(x) = ax + b$,тоді для ідентифікації цієї моделі необхідно підібрати коефіцієнти a і b, які забезпечили б наближення прямої до наявних статистичних даних, отриманих у результаті спостережень за об'єктом та представлених n парами значень x_i і y_i.

Найкраще наближення може бути отримано методом найменших квадратів (МНК), відповідно до якого мінімізується функціонал

$$F = \sum_1^n \left[y_i - y(x) \right]^2 \Rightarrow min.$$

Для шуканої моделі у вигляді прямої цей функціонал прийме вигляд

$$F = \sum_1^n \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 \Rightarrow min.$$

Як відомо, мінімум функції досягається в точці, де її похідна обертається у нуль.

Дорівняємо частинні похідні за змінними a і b. Одержимо

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2\sum_1^n (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_1^n (y_i - ax_i - b)(x_i) = 0$$

Розкривши суми, одержимо систему двох нормальних рівнянь регресії для обчислення коефіцієнтів a і b одномірної лінійної моделі

$$bn + a\sum_1^n x_i = \sum_1^n y_i$$

$$b\sum_1^n x_i + a\sum_1^n x_i^2 = \sum_1^n x_i y_i.$$

Загальне рішення цієї системи має вигляд:

$$b = (\sum_1^n y_i - a\sum_1^n x_i)/n ;$$

$$a = \frac{K_{xy}}{D_x} = (\sum_1^n x_i \sum_1^n y_i - n\sum_1^n x_i y_i)/[(\sum_1^n x_i)^2 - n\sum_1^n x_i^2 .$$

Таким чином, для побудови моделі необхідно накопичити згідно з вихідною кореляційною таблицею відповідні суми: $\sum_1^n x_i ; \sum_1^n y_i ; \sum_1^n x_i^2 ; \sum_1^n x_i y_i .$

Випадок нелінійної моделі. Нехай наближене теоретичне рівняння зв'язку двох параметрів бажано знайти наприклад у вигляді параболи загального виду $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, тоді для ідентифікації моделі необхідно підібрати коефіцієнти c_0, c_1 і c_2, що забезпечили б наближення n пар статистичних даних x_i і y_i до параболи. Підставивши рівняння параболи в приведений вище функціонал для методу найменших квадратів, одержимо систему з трьох нормальних рівнянь регресії

$$n\,c_0 + \left(\sum_1^n x_i\right) c_1 + \left(\sum_1^n x_i^2\right) c_2 = \sum_1^n y_i$$

$$\left(\sum_1^n x_i\right) c_0 + \left(\sum_1^n x_i^2\right) c_1 + \left(\sum_1^n x_i^3\right) c_2 = \sum_1^n x_i y_i$$

$$\left(\sum_1^n x_i^2\right) c_0 + \left(\sum_1^n x_i^3\right) c_1 + \left(\sum_1^n x_i^4\right) c_2 = \sum_1^n x_i^2 y_i$$

Очевидно, що для побудови цієї системи рівнянь необхідно накопичити наступні суми: $\sum_1^n x_i$; $\sum_1^n y_i$; $\sum_1^n x_i^2$; $\sum_1^n x_i^3$; $\sum_1^n x_i^4$; $\sum_1^n x_i y_i$; $\sum_1^n x_i^2 y_i$.

Вирішувати отриману систему можна векторно-матричним методом, методами Крамера, Гауса або на ЕОМ.

Наближене теоретичне рівняння зв'язку двох параметрів можна також знайти за бажанням у вигляді інших нелінійних моделей, наприклад, експоненти, показової або ступеневої функції тощо.

Рекомендації щодо розв'язання завдання в програмі *Mathcad*

Вносимо масиви вихідних даних у вигляді транспонованих одновимірних матриць *W* та *B*. Транспонування матриць зазначаємо через піктограму *Matrix Transpose* що панелі інструментів *Matrix*. Для пошуку коефіцієнтів лінійної регресії задаємо змінну, наприклад X та через оператор line вказуємо змінні в системі координат *W, B*, тобто залежність приросту біомаси від опадів. Після чого присвоюємо через змінні a та b значення коефіцієнтів лінійної регресії що знаходяться у першій та другій строчці вектору X, і мають відповідно індекси 0 та 1, оскільки нумерація елементів в Mathcad починається з нуля. Далі записуємо функцію лінійної регресії *f(t),* рис. 1

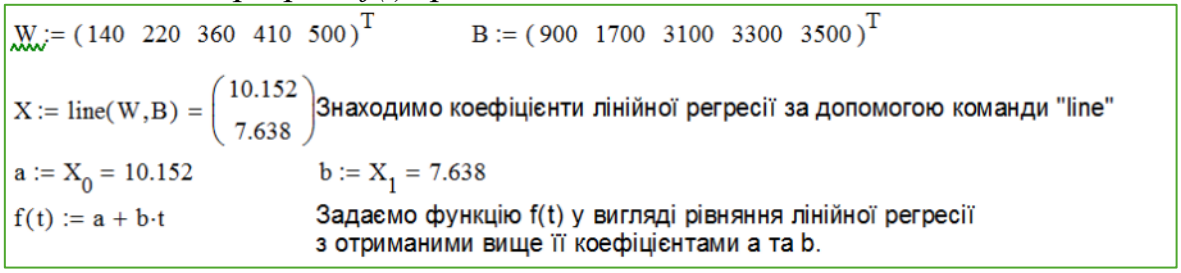


Рисунок 1 – введення вихідних даних та визначення коефіцієнтів лінійної регресії

Будуємо нелінійну модель регресії на основі поліному другого ступеню, рис. 2

$k := 2$ Задаємо ступінь поліному (для другого порядку k=2)

$s := regress(W, B, k) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -1.434 \times 10^{3} \\ 18.658 \\ -0.017 \end{pmatrix}$

За допомогою функції regress генеруємо масив коренів поліному другого порядку s для вхідних даних W та B .
У вихідному масиві s перші три елемнти (s0..s2) є службовими, корені поліному розміщуються далі, починаючи з четвертого елементу масива, тобто елементи (s3..s5).

Виписуємо знайдені корені поліному та підставляємо їх як коефіцієнти у рівнянні другого ступеню.
Останній корінь поліному (елемент s5) відповідає коефіцієнту у рівнянні що має найвищою ступінь.

$c_0 := s_3 = -1.434 \times 10^{3}$ $c_1 := s_4 = 18.658$ $c_2 := s_5 = -0.017$

Таким чином, отримуємо наступне рівняння у вигляді функції f1(t): $f_1(t) := c_0 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2$

Рисунок 2 – побудова нелінійної моделі регресії

Для побудови нелінійної моделі регресії використовуємо оператор regress, та зазначаємо ступінь поліному через змінну *k*. Для змінної s що отримає у вигляді вектору коефіцієнти регресії вказуємо *W, B* та *k* через функцію *regress*. У вихідному масиві s використовуємо 3 нижні строчки, що мають індекси s_3, s_4 та s_5 що і є коефіцієнтами рівняння регресії другого порядку. Після чого підставляємо їх до загального рівняння регресії, з урахуванням того що останній елемент вектору s буде мати найвищу ступінь тобто другу, передостанній – першу ступінь, а третій елемент представлений самим числовим значенням.

Будуємо графіки з вихідними даними, лінійною та нелінійною регресією, рис. 3

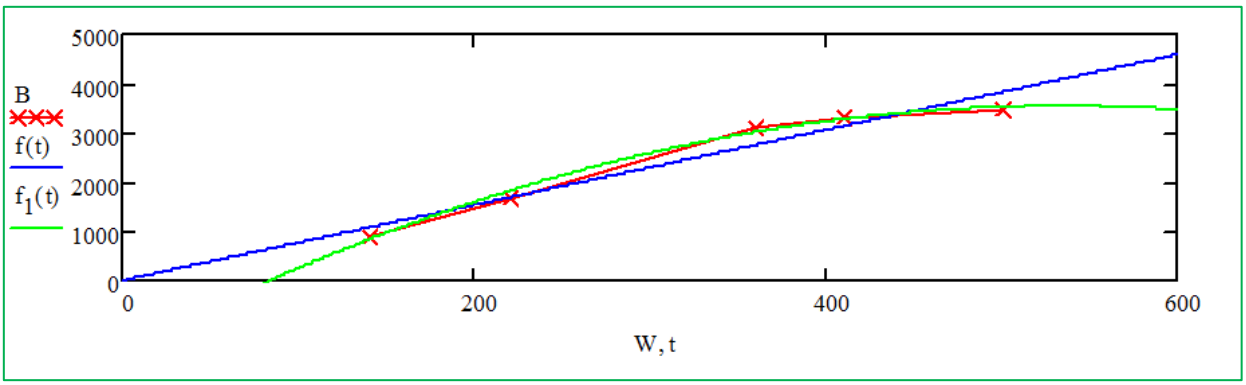


Рисунок 3 – побудова графіку регресії

Знаходимо корені для рівнянь регресії, що відповідатимуть величинам опадів які будуть викликати посуху, рис. 4

Для лінійної моделі:

Given $W0 := 1$ $a + b \cdot W0 = 0$

Find(W0) = −1.329

Для нелінійної моделі:

Given $W0 := 1$ $c_0 + c_1 \cdot W0 + c_2 \cdot W0^2 = 0$

Find(W0) = 83.336

ВИСНОВОК: Нелінійна модель краще описує залежність приросту біомаси від опадів. Згідно цій моделі посуха відбудеться, якщо опадів буде менш, ніж 83.336 мм/рік.

Рисунок 4 – побудова графіку регресії

Контрольні запитання.

1. Який характер має модель зв’язку зеленої маси в лісопосадці з величиною річних опадів та що вона дозволяє прогнозувати?
2. Яка точка на запропонованій моделі відповідає посусі, як її можна визначити?
3. До чого можуть привести надмірні опади і як це відіб’ється на моделі?
4. Яким методом можна досягти найкращого наближення експериментальних даних до обраної теоретичної моделі?
5. У чому полягає сутність методу найменших квадратів ?
6. Скільки нормальних рівнянь регресії треба скласти для побудови моделі, відповідно у вигляді прямої, звичайної параболи, поліному п’ятого ступеню?
7. У якому інтервалі змінюється коефіцієнт парної лінійної кореляції?

Лабораторна робота №7
Прогноз екологічних показників методами згладжування часових рядів

Мета роботи. Набуття навичок прогнозування екологічних показників на основі аналізу часових рядів шляхом обчислення різних середніх.

Виконання лабораторної роботи сприятиме формуванню у здобувачів наступних результатів навчання:

- володіти модельним підходом до об'єктів навколишнього середовища та уміти проводити пошук інформації;
- будувати прогнозні моделі стану довкілля на основі аналізу часових рядів даних стосовно впливу технологічних процесів та виробництв;
- моделювати й прогнозувати забруднення атмосфери в зоні розташування промислових підприємств з використанням інформаційних технології та ресурсів Інтернету про досліджувані території.

Постановка задачі. Вміст свинцю у верхньому шарі ґрунту – C, мкг/м^2, який визначають шляхом відбирання проб ґрунту з наступним лабораторним аналізом, представлено у вигляді дискретного ряду його динаміки $C_i = f(t_i)$, де i=1,2,3 .. n, за п'ять років від початку спостережень (n=5), наприклад у вигляді таблиці:

t_i,рік	1	2	3	4	5
$C_i = f(t_i)$, мкг/м^2	40	32	47	25	29

Примітка. Варіант для кожного студента задається індивідуально, наприклад, у вигляді ескізної діаграми, точки якої наносяться викладачем випадково, після чого студент самостійно обробляє ескізний графік, заносячи дані у таблицю, аналогічну наведеній.

Потрібно. Визначити тенденцію і дати прогноз вмісту свинцю на наступний n+1 момент часу (6-ий рік).

Порядок виконання. 1. Побудувати графік вихідного часового ряду за індивідуальними даними таблиці значень передісторії.

2. Обчислити значення ковзної середньої за трьома точками, нанести їх на графік і визначити тенденцію зміни параметра, що спостерігається.

3. Обчислити значення поточної середньої за рекурентним алгоритмом.

4. Обчислити експонентні середні за прогнозною моделлю нульового порядку і дати прогноз на n+1 момент часу.

5. Виконати прогноз на ЕОМ для n+1 та n+2 моментів часу з використанням моделей тенденції різного вигляду (моделі приведені у прикладній програмі для ПОМ). Порівнявши результати, вибрати прогнозу модель, що забезпечує реальний прогноз за наявними даними.

Зміст звіту:

- постановка задачі;
- таблиця вихідного часового ряду;
- графік з нанесеними ковзними, поточними і експонентними середніми;
- результати розрахунків на ЕОМ в програмі *Mathcad*;
- висновки за конкретними результатами розрахунків з характеристикою точності їхнього обчислення.

Методичні вказівки. Згладжування вихідного часового ряду $y(t)$ проводять “за трьома точками”.

Будь-яку функцію можна згладити за трьома, п'ятьома і навіть сімома точками, що дозволяє зменшити розкид значень вихідних даних y_i та виявити тенденцію часового ряду. У разі згладжування за трьома точками, почергово одержують уточнені значення $\overline{y}_i$ за фактично заданим y_i і найближчими до нього значеннями y_{i-1} та y_{i+1}. Загальна тенденція може бути позитивною (зростання параметру), негативною (убування) або указувати на коливальний чи екстремальний характер динаміки.

Найпростіший алгоритм згладжування за трьома точками має вигляд

$$\overline{y}_1 = \frac{5y_1+2y_2-y_3}{6};\ \overline{y}_i = \frac{y_{i-1}+y_i+y_{i+1}}{3};\ i = \overline{2, n-1};\ \overline{y}_n = \frac{5y_n + 2y_{n-1} - y_{n-2}}{6}$$

Приклад часового ряду з позитивною тенденцією.

№ точки за часом	i	y_i	Ковзна середня
1	1	0.9	0.97
2	2	2.12	1.98
3	3	2.92	3.063
4	4	4.15	3.99
5	5	4.9	5.05

Як бачимо, першу і останню середні обчислюють за фактичними значеннями трьох перших та трьох останніх значень вихідного часового ряду, а проміжні як середні трьох суміжних значень.

Згладжений за допомогою ковзної середньої часовий ряд наносять на графік вихідного часового ряду й оцінюють за характером тренда тенденцію зміни викиду за весь період передісторії (це може бути монотонне зниження чи зростання, а також коливання навколо середнього значення або крива з екстремумом).

Поточна середня. Іноді для оцінки прогнозу параметру на потрібний момент часу досить знати середнє значення передісторії, яке можна вважати за прогнозне.

Класична середня обчислюється за формулою $\overline{y} = (\sum_1^n y_i)/n$, що вимагає запам'ятовування усіх значень часового ряду. Тому іноді використовують рекурентний алгоритм накопичення поточного значення середньої, що вимагає запам'ятовування тільки попереднього значення середньої, поточного значення часового ряду і його порядкового номера:

$$\overline{y}_i = \overline{y}_{i-1} + \frac{1}{i}\left(y_i - \overline{y}_{i-1}\right); i = \overline{1,n}.$$

Приклад

i	y_i	Поточна середня
1	0,9	0,9
2	2,12	0,9+ (1/2)(2,12-0,9)=1,51
3	2,92	1,51+ (1/3)(2,92-1,51)=1,98
4	4,15	1,98+ (1/4)(4,15-1,98)=2,52
5	4,9	2,52+ (1/5)(4,9-2,52)=2,99
Середня	2,99	

Метод експонентного згладжування. Прогноз методом експонентного згладжування враховує ступінь впливу кожної точки вихідного часового ряду на прогнозовану. Очевидно, що в багатьох випадках останні точки передісторії мають значно більший вплив на прогноз, ніж перші. Це саме і враховує метод експонентного згладжування за рахунок відповідного параметру згладжування. Сутність методу полягає в згладжуванні часового ряду за допомогою зваженої ковзної середньої, у якій вага спостережень підкоряються експоненціальному закону імовірності.

Рекурентна формула Р. Брауна для визначення експонентної середньої *p*-го порядку має вигляд

$$S_t^{[p]} = \alpha \cdot S_t^{[p-1]} + \beta \cdot S_{t-1}^{[p]},$$

де α - безрозмірний параметр згладжування, що вибирається в межах $0 \le \alpha \le 1$, при цьому він дозволяє керувати впливом даних часового ряду на прогнозовану точку (при α=0 на прогноз будуть однаково впливати всі точки часового ряду, а при α=1 - тільки остання); $\beta = 1 - \alpha$; $p = \overline{1,n}$ - порядок середніх (порядок полінома, що інтерполює); t - змінний поточний параметр, аналогічний i, що

одночасно характеризує число точок передісторії. Характерно, що при $p=1$, експонентні середні $S_t^{p-1}=S_t^0$ являють собою вихідний часовий ряд y_t.

Відповідно до цієї моделі кількість розв'язуваних рівнянь залежить від *p*.

При *p*=1 маємо модель нульового порядку з одним рекурентним рівнянням вигляду

$$S_t^{[1]}=\alpha\cdot y_t+\beta\cdot S_{t-1}^{[1]}.$$

Відповідно до цієї моделі одержимо тренд, початкова точка якого дорівнює середньому значенню передісторії, тобто

$$S_0^1=a1=\frac{\sum_1^t y_t}{t},$$

а прогнозне значення оцінюється величиною $\widetilde{y}_{t+\tau}=\widetilde{a}_{1,t}=S_t^{[1]}$.

Таким чином, останнє значення, обчислене за рекурентною моделлю нульового порядку, чисельно дорівнює прогнозу на наступний дискретний момент часу.

Точність прогнозу оцінюють за фактичною контрольною точкою часового ряду, яка порівнюється з прогнозованою

$$\delta_{t+\tau}=\frac{\widetilde{y}_{t+\tau}-y_{t+\tau}}{y_{t+\tau}}\cdot 100\ \%.$$

Приклад. Для заданого часового ряду:

	1	2	3	4	5	6-контрольна точка
y_t	510	497	504	510	509	$y_{t+\tau}$= 503

дати прогноз по п’яти точкам передісторії на шосту й оцінити точність прогнозу.

Задаємося параметром згладжування ($0\le\alpha\le 1$) або обчислимо його за формулою

$$\alpha=\frac{2}{t+1}=\frac{2}{5+1}=0{,}33.$$

Обчислимо початкове значення експоненціальної середньої

$$S_0^{[1]}=a1=\frac{\sum_1^t y_t}{t}=\frac{510+497+504+510+509}{5}=506.$$

Обчислимо послідовно експонентні середні з першої по п'яту

$$S_t^{[1]}=\alpha\cdot y_t+\beta\cdot S_{t-1}^{[1]}=S_1^{[1]}=\alpha\cdot y_1+\beta\cdot S_0^{[1]}=0.33\cdot 510+0.67\cdot 506=507.3;$$

$$S_2^{[1]}=\alpha\cdot y_2+\beta\cdot S_1^{[1]}=0.33\cdot 497+0.67\cdot 507.3=503.9;$$

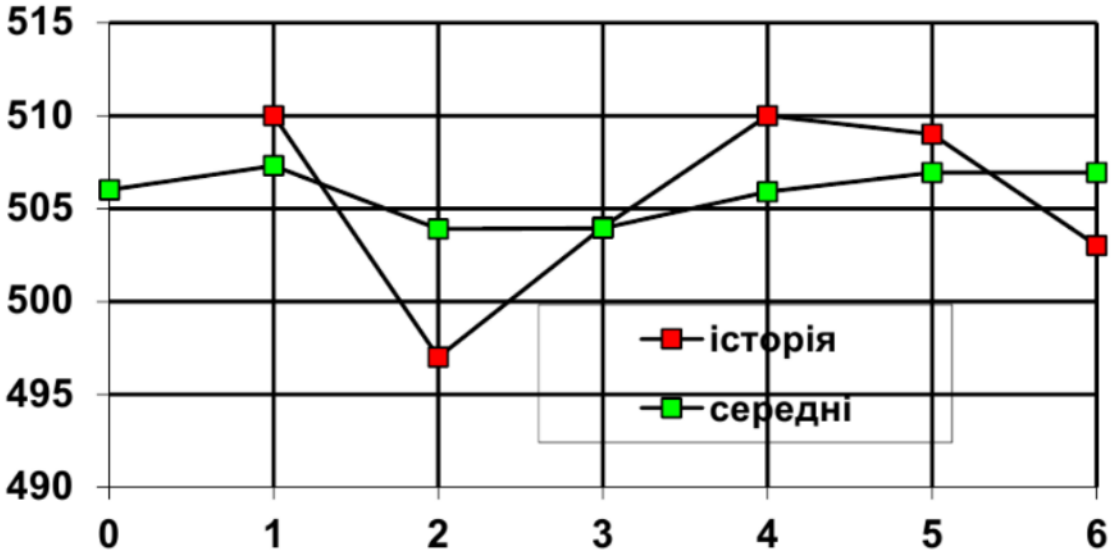
$$S_3^{[1]}=\alpha\cdot y_3+\beta\cdot S_2^{[1]}=0.33\cdot 504+0.67\cdot 503.9=503.93;$$

$$S_4^{[1]} = \alpha \cdot y_4 + \beta \cdot S_4^{[1]} = 0.33 \cdot 510 + 0.67 \cdot 503.93 = 505.9;$$

$$S_5^{[1]} = \alpha \cdot y_5 + \beta \cdot S_5^{[1]} = 0.33 \cdot 509 + 0.67 \cdot 505.9 = 506.94.$$

Прогнозоване значення тимчасового ряду в шостій точці дорівнює п'ятій експоненціальній середній

$$\tilde{y}_{t+\tau} = \tilde{a}_{1,t} = S_t^{[1]} = \tilde{y}_6 = \tilde{a}_{1,5} = S_5^{[1]} = 506.94$$



Точність прогнозу:

$$\delta_{t+\tau} = \frac{\tilde{y}_{t+\tau} - y_{t+\tau}}{y_{t+\tau}} \cdot 100 = \delta_{6\tau} = \frac{\tilde{y}_6 - y_6}{y_6} \cdot 100 = \frac{506.94 - 503}{503} = 0.78\% .$$

У випадку, коли відносне відхилення перевищує 5-10%, рекомендується спробувати поліпшити прогноз зміною параметра згладжування у межах $0 \le \alpha \le 1$.

Якщо показники часового ряду ростуть або убувають, будують прогноз за моделлю першого порядку.

Модель першого порядку буде мати тренд $f(t) = a1 + a2 \cdot t$

При цьому експонентні середні обчислюють за двома рекурентними рівняннями

$$S_t^{[1]} = \alpha \cdot y_t + \beta \cdot S_{t-1}^{[1]};$$

$$S_t^{[2]} = \alpha \cdot S_t^{[1]} + \beta \cdot S_{t-1}^{[2]}.$$

Початкові умови:

$$S_0^{[1]} = a1 - \frac{\beta}{\alpha} a2 \text{ і } S_0^{[2]} = a1 - \frac{2 \cdot \beta}{\alpha} a2,$$

причому за коефіцієнти *a1* і *a2* у початкових умовах приймають коефіцієнти рівняння регресії тренда, побудованого методом найменших квадратів за даними вихідного часового ряду.

Оцінки параметрів рівняння прогнозу:

$$\tilde{a}_{1,t} = 2 \cdot S_t^{[1]} + S_t^{[2]};\ \tilde{a}_{2,t} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(S_t^{[1]} + S_t^{[2]} \right)$$

Прогноз: $\tilde{y}_{t+\tau} = \tilde{a}_{1,t} + \tau \cdot \tilde{a}_{2,t} = S_t^{[1]}\left(2 + \frac{\alpha}{\beta}\tau\right) - S_t^{[2]}\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Якщо показники часового ряду змінюються у часі неоднозначно, або мають екстремуми, будують прогноз за моделлю вищих порядків, але їх побудова вручну не доцільна, оскільки зростає кількість рекурентних рівнянь, які потрібно вирішувати сумісно ітераційним шляхом. Так, у випадку часового ряду у вигляді параболи (n =2), кількість рівнянь дорівнює трьом.

Рекомендації щодо розв'язання завдання в програмі *Mathcad*

Задаємо часовий вектор (T) та заносимо дані у вигляді вектору концентрацій (C) і транспонуємо вектори відповідно до вимог програми, рис. 1

$T := (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)^T$ Задаємо часовий вектор (T)

$C := (40 \quad 32 \quad 47 \quad 25 \quad 29)^T$ Заносимо дані у вигляді вектора концентрацій (C)

Рисунок 1 – введення вихідних даних

Виконуємо лінійну інтерполяцію (з'єднання) вхідних даних через функцію *linterp*. Для прогнозу значень концентрації на наступний (один) період використовуємо функцію *predict*, та також знаходимо коефіцієнти лінійної регресії через функцію *line*, рис. 2

$A(t) := \text{linterp}(T, C, t)$ Виконуємо лінійну інтерполяцію (з'єднання) вхідних даних

$\text{predict}(C, 4, 1) = (26.25)$ Виконуємо прогноз значення концентрації на наступний (один) період

$\text{line}(T, C) = \begin{pmatrix} 43.3 \\ -2.9 \end{pmatrix}$ Знаходимо коефіцієнти лінійної моделі

$F(t) := \text{line}(T, C)_0 + \text{line}(T, C)_1 \cdot t$ Підставляємо у рівнняння лінійної моделі знайдені коефіцієнти регресії

Рисунок 2 – введення вихідних даних

Будуємо модель експоненційного згладжування: задаємо початкові значення коефіцієнтів рівняння регресії у вигляді вектору G та через функцію *expfit* отримуємо розраховані коефіцієнти які підставляємо до експоненційної моделі, рис. 3

$G := (1 \quad 1 \quad 1)^T$ Задаємо початкові значення коефіцієнтів рівняння регресії регресії

$E := expfit(T, C, G) = \begin{pmatrix} -1.398 \\ 0.465 \\ 41.526 \end{pmatrix}$ Отримуємо розраховані коефіцієнти експоненційної регресії

$Fexp(t) := E_0 e^{(E_1 \cdot t)} + E_2$ Підставляємо знайдені коефіцієнти до експоненційної моделі

Рисунок 3 – побудова експонентної моделі згладжування

Наносимо вихідні дані а також лінійну та експонентну модель на один рисунок, рис. 4

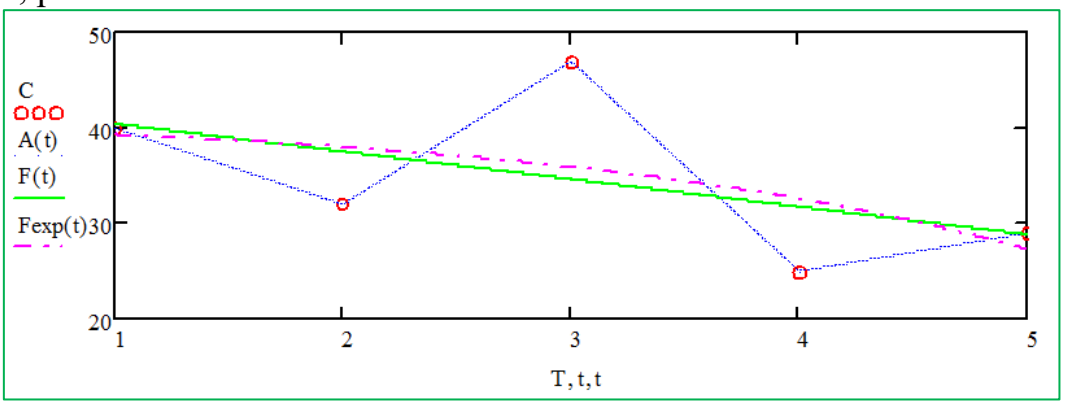


Рисунок 4 – графіки згладжування часових рядів

Контрольні запитання.

1. Звідки важкі метали потрапляють до верхнього шару ґрунту ?
2. Як на практиці можна визначити вміст свинцю у ґрунті?
3. Які переваги та недоліки має поточна середня, порівняно з класичною?
4. Для чого згладжують часові ряди, як це можна зробити?
5. Якою може бути тенденція зміни контрольованого параметру у часі?
6. Вагу яких точок передісторії, а значить і вплив на прогноз, можна підвищити за допомогою експонентної середньої?
7. Якими будуть експонентні середні та прогноз нульового порядку при граничних (0 або 1) значеннях параметру згладжування часового ряду?

Лабораторна робота №8
Дослідження залежності зміни концентрації пилу за довжиною вентиляційного каналу

Мета роботи. Набуття навичок дослідження диференціальних моделей чисельним методом.

Виконання лабораторної роботи сприятиме формуванню у здобувачів наступних результатів навчання:

- будувати моделі довкілля у вигляді диференціальних рівнянь;
- моделювати й прогнозувати забруднення атмосфери в зоні розташування промислових підприємств з використанням інформаційних технології та ресурсів Інтернету про досліджувані території.

Постановка задачі. Зміна концентрації пилу C у вентильованій галереї, що обладнана конвеєром, за її довжиною l через осадження і винос пилу описується рівнянням

$$\frac{dC}{dl} = -k \cdot (C - a),$$

аналітичне рішення якого має вигляд

$$C = (C_0 - a)\, exp(-k \cdot l) + a.$$

де k - коефіцієнт, що характеризує зниження вмісту пилу в повітрі при віддаленні від джерела, м$^{-1}$ (залежить від середнього розміру пилових часток та густини їх речовини), тобто визначає процес осідання пилу; a– визначає інтенсивність розосередженого джерела пилу, у даному разі конвеєрної лінії, мг/м^3.

Потрібно. Одержати чисельним методом розв'язок вихідного диференціального рівняння на інтервалі довжини l від 0 до 200 м із кроком h =20 м, при початкових умовах C =C_0=100, мг/м^3 для l =0. За величину a прийняти N_{var} за списком; Варіанти: значень k обрати довільно з ряду: 0,021; 0,016; 0,025, м$^{-1}$.

Порядок виконання 1. Обчислити значення інтеграла рівняння за формулами Ейлера або Рунге-Кутта (за бажанням), представивши їх у вигляді таблиці.

2. За даними таблиці побудувати графік, на якому позначити асимптоту і вказати інтервал від 0 до l=1/k., що характеризує область найбільш інтенсивного осідання пилу.

3. Перевірити розрахунки на ЕОМ, побудувавши графік за формулою аналітичного рішення.

Зміст звіту:

- постановка задачі;
- вихідне рівняння, відповідно до варіанта;
- таблиця рішення;
- графік відповідно до пункту 2;
- висновки за конкретними результатами розрахунків.

Методичні вказівки. Розв'язання диференціальних рівнянь чисельними методами.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

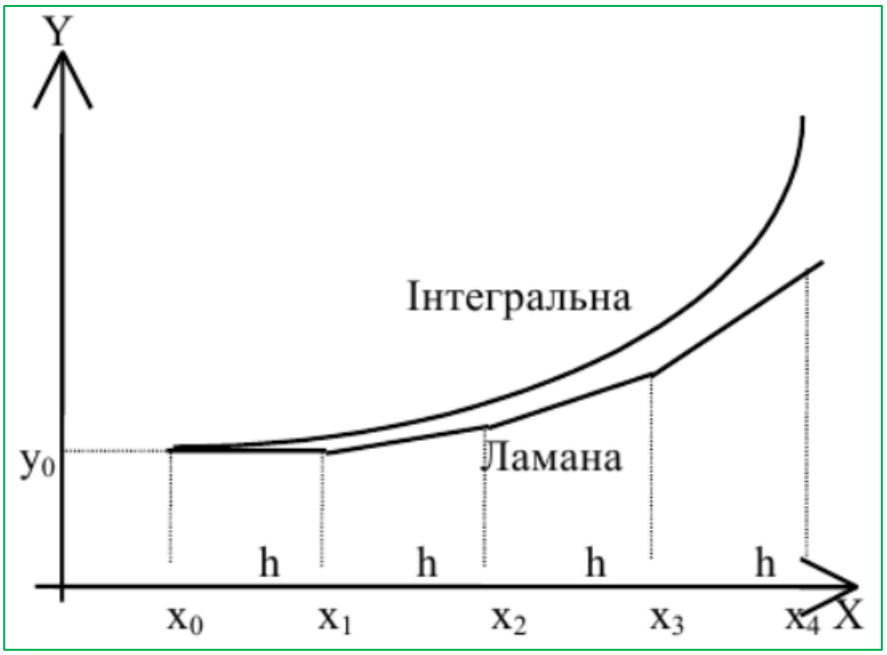
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Знайти його чисельне рішення - це значить скласти таблицю дискретних значень $y(x)$, що задовольняють заданим початковим умовам.

Нехай $y(x)$ - це рішення і $x = x_0$ – початкова умова аргументу, а $y(x_0) = y_0$ – ординати.

Метод Ейлера. Метод полягає в тому, на малому проміжку h незалежної перемінної інтегральна крива диференціального рівняння заміняється прямою, дотичною до неї в початковій точці, а рішення одержують у вигляді ламаної, що

складається з відрізків прямих, котрі мають нахил дотичних у точках, відповідно до кроків h



Робоча формула Ейлера має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i \cdot y_i); i = \overline{0,k}$$

Приклад:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \frac{xy}{2};$$

початкові умови $x = x_0 = 0$, а $y(x_0) = y_0 = 1$.

Рішення одержати на відрізку $[0;0.5]$ при кроці h =0.1

i	x_i	y_i	$f(x_i \cdot y_i)$	$h \cdot f(x_i \cdot y_i)$
0	0	1	0	0
1	0.1	1	0.05	0.005
2	0.2	1.005	0.1005	0.0100
3	0.3	1.015	0.1522	0.0152
4	0.4	1.0303	0.2061	0.0206
5	0.5	1.0509	0.2627	0.0263

Метод Рунге-Кутта.

Метод Ейлера має значну похибку, тому використовують метод Рунге-Кутта, рекурентна формула якого має вигляд:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{(K1 + 2 \cdot K2 + 2 \cdot K3 + K4)}{6}; i = \overline{0,k},$$

де $K1 = f(x_i \cdot y_i)$;

$$K2 = f(x_i + h/2; y_i + K1/2);$$

$$K3 = f(x_i + h/2; y_i + K2 \cdot h/2);$$

$$K3 = f\left(x_i + h; y_i + K3 \cdot h\right).$$

Рекомендації щодо розв'язання завдання в програмі *Mathcad*

Вносимо вхідні значення до розрахунків, рис. 1

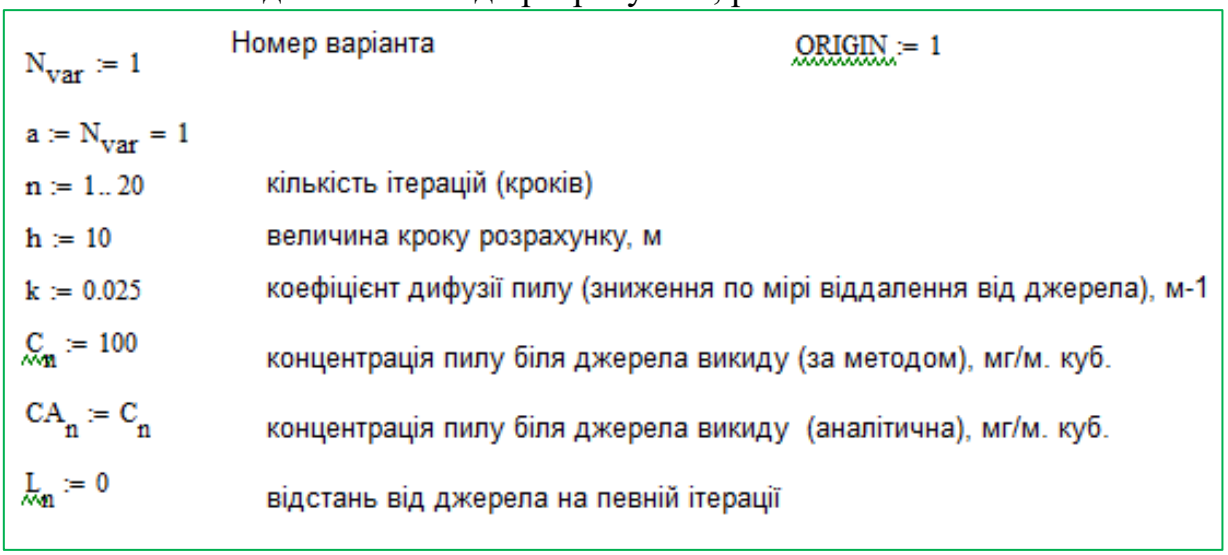
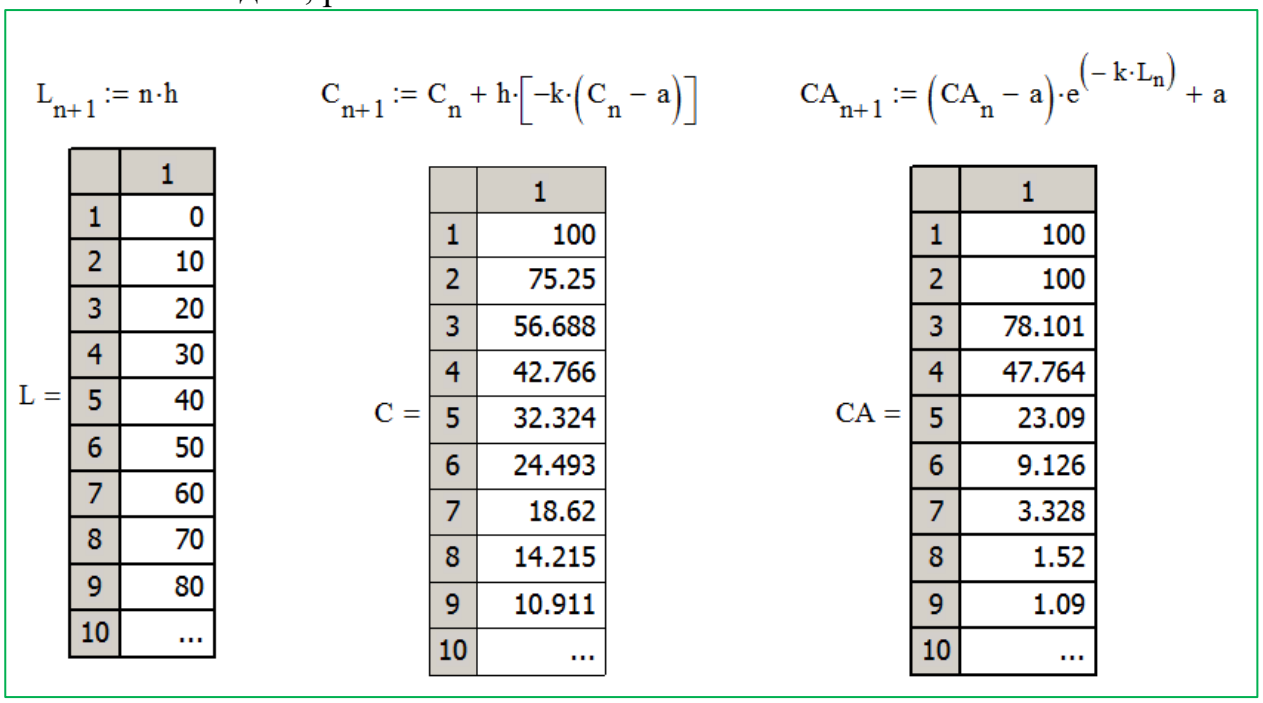


Рисунок 1 – введення вихідних даних і початкових значень

Вносимо рівняння моделей для розрахунків концентрації пилу в галереї шахти: C_n для диференціальної моделі (За методом Ейлера) та CA_n – для аналітичної моделі, рис. 2



	1
1	0
2	10
3	20
4	30
5	40
6	50
7	60
8	70
9	80
10	…

	1
1	100
2	75.25
3	56.688
4	42.766
5	32.324
6	24.493
7	18.62
8	14.215
9	10.911
10	…

	1
1	100
2	100
3	78.101
4	47.764
5	23.09
6	9.126
7	3.328
8	1.52
9	1.09
10	…

Рисунок 2 – побудова моделей концентрації пилу в шахтній галереї та вивід розрахункових значень

Будуємо 2 графіки для порівняння розрахунків концентрації пилу за аналітичним рівнянням та на диференційній моделі Ейлера, рис. 3

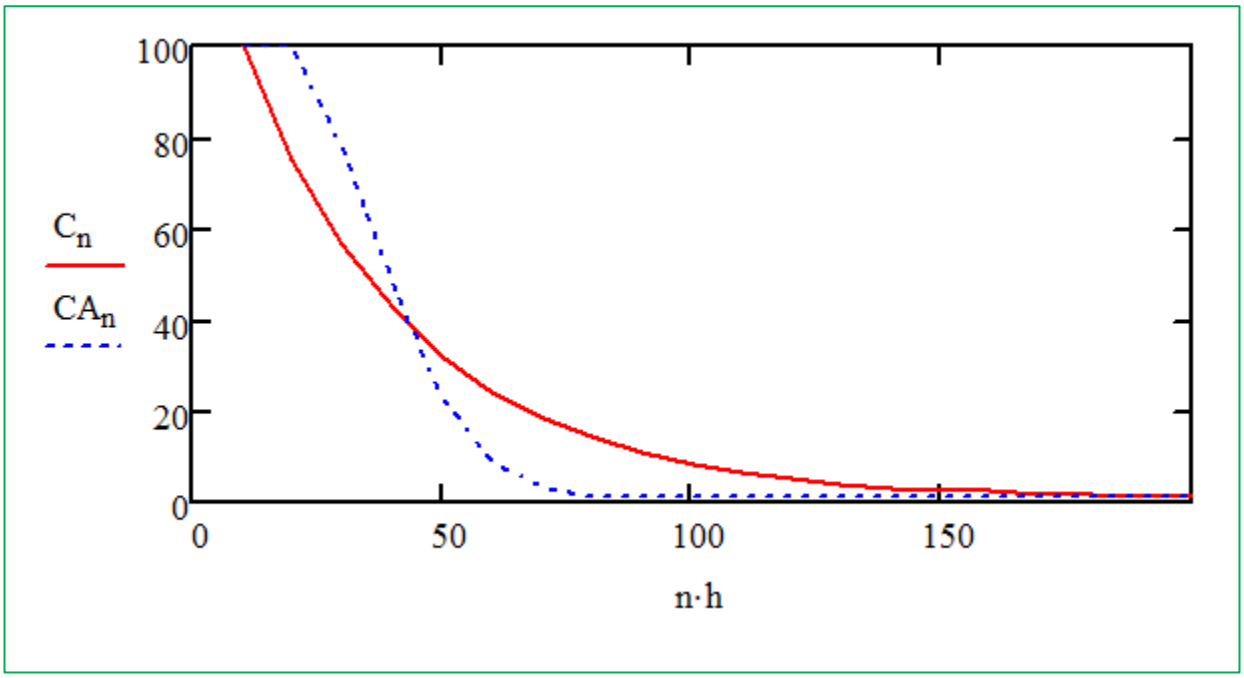


Рисунок 3 – розрахунок концентрацій пилу в шахтній галереї від джерела забруднення

Контрольні запитання.

1. Який змінюється концентрація пилових часток в атмосфері при віддаленні від джерела пилу?
2. Від чого залежать інтенсивність осідання пилових часток в атмосфері?
3. Чому у конвеєрній галереї концентрація часток в повітрі не падає до нуля?
4. Що примушує використовувати чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь?
5. Який недолік має метод Ейлера, порівняно з методом Рунге-Кутта?
6. Як зміниться похибка чисельного методу Ейлера при зменшенні кроку ітерацій?

КРИТЕРІЇ ТА ПРОЦЕДУРИ ОЦІНЮВАННЯ

Навчальні досягнення здобувачів вищої освіти за результатами вивчення курсу оцінюватимуться за шкалою, що наведена нижче:

Рейтингова шкала	Інституційна шкала
90-100	відмінно
74-89	добре
60-73	задовільно
0-59	незадовільно

Загальні критерії досягнення результатів навчання відповідають описам 7-го кваліфікаційного рівня НРК.

Здобувачі вищої освіти можуть отримати підсумкову оцінку з навчальної дисципліни на підставі поточного оцінювання знань за умови, якщо набрана кількість балів складатиме не менше як 60 балів. Максимальне оцінювання:

Теоретична частина	Лабораторні роботи	Самостійна робота з підготовки до лабораторних робіт	Разом
60	32	8	100

Теоретична частина оцінюється за результатами письмових відповідей, що містить 4 відкритих запитань.

Критерії оцінювання підсумкової роботи

Відкриті запитання оцінюються за суттю, логікою, глибиною, презентабельністю відповіді та правильністю наведених графіків, формул і розрахунків. За кожне питання здобувач отримує до **15** балів (**разом 60 балів**).

Критерії оцінювання лабораторної роботи За кожну лабораторну роботу здобувач вищої освіти може отримати до 4 балів (усього 32 бали), а саме:

4 бали: отримано правильну відповідь стосовно порядку отримання в обчислювальних експериментах даних і результатів, використаних приладів, засобів чи комп'ютерних програм з поясненням змісту окремих складових використаних моделей та правильним зазначенням одиниць виміру параметрів моделі.

3 бали: отримано правильну відповідь з незначними неточностями стосовно порядку отримання в обчислювальних експериментах даних і результатів або у поясненнях змісту складових моделей чи не зазначено одиниці виміру.

2 бали: отримано неправильну відповідь стосовно порядку отримання в обчислювальних експериментах даних і результатів, проте використано потрібні складові математичних моделей, зазначено одиниці виміру.

0 балів: наведено неправильну відповідь, до якої не надано жодних пояснень.

Критерії оцінювання самостійної роботи

За кожну підготовлену до обчислювального експерименту лабораторну роботу здобувач отримує:

1 бал (разом до 8 балів).

0 балів: роботу не підготовлено до обчислювального експерименту.

Рекомендована література

1. Моделювання та прогнозування стану довкілля [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт для здобувачів ступеня бакалавра освітньо-професійної програми «Технології захисту навколишнього середовища» зі спеціальності 183 Технології захисту навколишнього середовища / В.Є. Колесник, Ю.В. Бучавий ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 38 с.
2. Колесник В.Є. Моделювання і прогнозування стану довкілля. Методичні рекомендації до виконання курсової роботи для студентів освітньо-професійних програм «Екологія» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти / В.Є. Колесник., Ю.В. Бучавий; Міністерство освіти і науки України, Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2022. – 24 с.
3. Моделювання і прогнозування стану довкілля: підручник /В.І. Лаврик, В.М. Боголюбов, Л.М. Полєтаєва та ін..–К.: ВЦ «Академія», 2010.-400 с.
4. Богобоящий О.М., Курбанов К.Р., Палій П.Б., Шмандій В.М. Принципи моделювання та прогнозування в екології: Підручник. – К: Центр навчальної літератури, 2004.– 216 с.
5. Моделювання і прогнозування стану довкілля: підручник у 2Ч, Ч1 /Т.Б. Михайлівська, В.М. Ісаєнко, В.А. Гроза, В.М. Криворотько.– К.: Книжне вид-во «НАУ», 2006. –212 с.
6. Гладкий А.В., Скопецький В.В Методи числового моделювання екологічних процесів: Навч. посібник. – К.: ІВЦ «Вид-во „Політехніка», ТОВ Фірма «Періодика», 2005.– 152 с.
7. Рудаков Д.В. Математичні моделі в охороні навколишнього середовища:[Навчальний посібник].–Д.: Вид-во Дніпропетровського університету, 2004. – 160 с.
8. Mathcad: Math Software for Engineering Calculations. www.mathcad.com (англ.). Дата звернення 12 серпня 2023.
9. PTC Mathcad Features: Mathcad. *www.mathcad.com* (англ.). Дата звернення 14 серпня 2023.
10. PTC Mathcad Prime 9 datasheet (PDF). *www.mathcad.com* (англ.) . PTC. Дата звернення 12.08.2023.
11. MATLAB https://uk.wikipedia.org/wiki/MATLAB Дата звернення 01.10.2024.

Навчальне видання

Бучавий Юрій Володимирович

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ
Інформаційне та програмне забезпечення для виконання лабораторних робіт з дисципліни «Моделювання та прогнозування стану довкілля» для здобувачів ступеня бакалавра освітньо-професійних програм «Екологія» спеціальності 101 «Екологія» та «Технології захисту навколишнього середовища» спеціальності 183 Технології захисту навколишнього середовища

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.