

**Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»**

Кафедра прикладної математики

«ЗАТВЕРДЖЕНО»

завідувач кафедри



О.О. Сдвижкова

«28» серпня 2025 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«Елементи варіаційного числення»**

Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	113 Прикладна математика
Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Освітня програма	Математичне моделювання систем і процесів
Статус	Обов'язкова
Загальний обсяг	3 кредити ЄКТС (90 годин)
Форма підсумкового контролю	Диференційований залік
Термін викладання	6 семестр (11, 12 чверті)
Мова викладання	Українська

Викладач: доц. Шпорта А.Г.

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

Робоча програма навчальної дисципліни «Елементи варіаційного числення» для бакалаврів освітньо-професійної програми вищої освіти «Математичне моделювання систем і процесів» зі спеціальності 113 Прикладна математика / Нац. техн. ун-т. «Дніпровська політехніка», каф. прикладної математики. – Д. : НТУ «ДП», 2025. – 14 с.

Розробник – к.ф-м.н., доц. каф. прикладної математики Шпорта Анна Григорівна

Робоча програма регламентує:

- мету дисципліни;
- дисциплінарні результати навчання, сформовані на основі трансформації очікуваних результатів навчання освітньої програми;
- базові дисципліни;
- обсяг і розподіл за формами організації освітнього процесу та видами навчальних занять;
- програму дисципліни (тематичний план за видами навчальних занять);
- алгоритм оцінювання рівня досягнення дисциплінарних результатів навчання (шкали, засоби, процедури та критерії оцінювання);
- інструменти, обладнання та програмне забезпечення;
- рекомендовані джерела інформації.

Робоча програма призначена для реалізації компетентнісного підходу під час планування освітнього процесу, викладання дисципліни, підготовки студентів до контрольних заходів, контролю провадження освітньої діяльності, внутрішнього та зовнішнього контролю забезпечення якості вищої освіти, акредитації освітніх програм у межах спеціальності.

Погоджено рішенням методичної комісії за спеціальністю F1 Прикладна математика (113 Прикладна математика)(протокол № 8 від 29.08.2025).

ЗМІСТ

1 МЕТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ	4
2 ОЧІКУВАНІ ДИСЦИПЛІНАРНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ.....	4
3 БАЗОВІ ДИСЦИПЛІНИ.....	5
4 ОБСЯГ І РОЗПОДІЛ ЗА ФОРМАМИ ОРГАНІЗАЦІЇ ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ ТА ВИДАМИ НАВЧАЛЬНИХ ЗАНЯТЬ	5
5 ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ ЗА ВИДАМИ НАВЧАЛЬНИХ ЗАНЯТЬ.....	5
6 ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ.....	7
6.1 Шкали.....	7
6.2 Засоби та процедури	8
6.3 Критерії	9
7 ІНСТРУМЕНТИ, ОБЛАДНАННЯ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ	9
8.1 Основна література	13
8.2 Допоміжна література.....	14
9 ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ	13

1 МЕТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

В освітньо-професійній програмі «Математичне моделювання систем і процесів» спеціальності 113 Прикладна математика здійснено розподіл програмних результатів навчання (ПРН) за організаційними формами освітнього процесу. Зокрема, до дисципліни Ф24 «Елементи варіаційного числення» віднесено такі результати навчання:

РН02	Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.
------	---

Мета дисципліни «Елементи варіаційного числення» – формування у здобувачів освіти системи знань про основні поняття, методи та принципи варіаційного числення і їх застосування до побудови та аналізу математичних моделей реальних систем і процесів.

Реалізація мети вимагає трансформації програмних результатів навчання в дисциплінарні та відбір змісту навчальної дисципліни за цим критерієм.

2 ОЧІКУВАНІ ДИСЦИПЛІНАРНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Дисциплінарні результати навчання (ДРН)		
ПРН	шифр ДРН	зміст
РН02	РН02.1-Б7	Знати основні поняття варіаційного числення: функціонал, варіація функціонала, приріст функціонала, допустимі функції та екстремалі; необхідні та достатні умови існування екстремуму функціонала; рівняння Ейлера, Ейлера–Пуассона та Ейлера–Лагранжа, їх фізичний та геометричний зміст; принципи побудови класичних варіаційних задач (брахістохрона, геодезичні лінії, ізопериметрична задача); методи знаходження умовного екстремуму за допомогою множників Лагранжа; застосування варіаційних методів для аналізу та розв’язання крайових задач математичної фізики.
	РН02.2-Б7	Формулювати варіаційні задачі для функціоналів та знаходити їх екстремалі; обчислювати першу та другу варіації функціонала; виводити рівняння Ейлера та його узагальнення для різних типів варіаційних задач; знижувати порядок рівняння Ейлера та досліджувати допустимі екстремалі; застосовувати канонічні рівняння екстремалей і метод Лагранжа для задач із умовами; розв’язувати класичні варіаційні задачі аналітичними та чисельними методами.
	РН02.3-Б7	Будувати математичні моделі реальних процесів у варіаційній формі; методами аналізу функціоналів і дослідження екстремумів у просторі функцій;

Дисциплінарні результати навчання (ДРН)		
ПРН	шифр ДРН	зміст
		прийомами переходу від варіаційних постановок до диференціальних рівнянь Ейлера–Лагранжа; умінням застосовувати варіаційні принципи у прикладних задачах фізики, механіки, оптимізації та математичного моделювання.

3 БАЗОВІ ДИСЦИПЛІНИ

Назва дисципліни	Здобуті результати навчання
Б1 Математичний аналіз	Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.
Б6 Диференціальні рівняння	Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.

4 ОБСЯГ І РОЗПОДІЛ ЗА ФОРМАМИ ОРГАНІЗАЦІЇ ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ ТА ВИДАМИ НАВЧАЛЬНИХ ЗАНЯТЬ

Вид навчальних занять	Обсяг, години	Розподіл за формами навчання, години	
		денна	
		аудиторні заняття	самостійна робота
лекційні	45	17	28
практичні	45	17	28
РАЗОМ	90	34	56

5 ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ ЗА ВИДАМИ НАВЧАЛЬНИХ ЗАНЯТЬ

Шифри ДРН	Види та тематика навчальних занять	Обсяг складових, години
	ЛЕКЦІЇ	45
RH02.1-Б7	Поняття про функціонал. Екстремум функціоналу. Класичні задачі варіаційного числення. Неперервність. Лінійний функціонал.	15
RH02.2-Б7 RH02.3-Б7	Варіація функції та приріст функціоналу. Перша та друга варіації функціоналу.	
RH02.1-Б7 RH02.2-Б7	Необхідна умова екстремуму функціоналу. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння екстремалей (рівняння Ейлера)	
RH02.3-Б7	Диференціальне рівняння екстремалей функціоналу, в який входять похідні вищих порядків (рівняння Ейлера–Пуассона).	15
RH02.2-Б7	Система диференціальних рівнянь екстремалей функціоналу, що залежить від кількох функцій (система рівнянь Ейлера–Лагранжа). Достатні умови екстремуму. Умовний екстремум. Варіаційні принципи. Умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача	15
RH02.3-Б7	Задача на екстремум функціоналу з рухомими кінцями. Умови трансверсальності. Варіаційні принципи.	
	ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ	45
RH02.1-Б7	Поняття про функціонал. Екстремум функціоналу. Класичні задачі варіаційного числення. Неперервність. Лінійний функціонал.	15
RH02.2-Б7 RH02.3-Б7	Варіація функції та приріст функціоналу. Перша та друга варіації функціоналу.	
RH02.1-Б7 RH02.2-Б7	Необхідна умова екстремуму функціоналу. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння екстремалей (рівняння Ейлера)	

Шифри ДРН	Види та тематика навчальних занять	Обсяг складових, години
RH02.3-Б7	Диференціальне рівняння екстремалей функціоналу, в який входять похідні вищих порядків (рівняння Ейлера–Пуассона).	
RH02.2-Б7	Система диференціальних рівнянь екстремалей функціоналу, що залежить від кількох функцій (система рівнянь Ейлера–Лагранжа). Достатні умови екстремуму. Умовний екстремум. Варіаційні принципи. Умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача	15
RH02.3-Б7	Задача на екстремум функціоналу з рухомими кінцями. Умови трансверсальності. Варіаційні принципи.	
РАЗОМ		90

6 ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

Сертифікація досягнень студентів здійснюється за допомогою прозорих процедур, що ґрунтуються на об'єктивних критеріях відповідно до Положення університету «Про оцінювання результатів навчання здобувачів вищої освіти».

Досягнутий рівень компетентностей відносно очікуваних, що ідентифікований під час контрольних заходів, відображає реальний результат навчання студента за дисципліною.

6.1 Шкали

Оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП» здійснюється за рейтинговою (100-бальною) та інституційною шкалами. Остання необхідна (за офіційною відсутністю національної шкали) для конвертації (переведення) оцінок здобувачів вищої освіти різних закладів.

Шкали оцінювання навчальних досягнень студентів НТУ «ДП»

Рейтингова	Інституційна
90...100	відмінно / Excellent
75...89	добре / Good
60...74	задовільно / Satisfactory
0...59	незадовільно / Fail

Кредити навчальної дисципліни зараховуються, якщо студент отримав підсумкову оцінку не менше 60-ти балів. Нижча оцінка вважається академічною

заборгованістю, що підлягає ліквідації відповідно до Положення про організацію освітнього процесу НТУ «ДП».

6.2 Засоби та процедури

Зміст засобів діагностики спрямовано на контроль рівня сформованості знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності та автономії студента за вимогами НРК до 6-го кваліфікаційного рівня під час демонстрації регламентованих робочою програмою результатів навчання.

Студент на контрольних заходах має виконувати завдання, орієнтовані виключно на демонстрацію дисциплінарних результатів навчання (розділ 2).

Засоби діагностики, що надаються студентам на контрольних заходах у вигляді завдань для поточного та підсумкового контролю, формуються шляхом конкретизації вихідних даних та способу демонстрації дисциплінарних результатів навчання.

Засоби діагностики (контрольні завдання) для поточного та підсумкового контролю дисципліни затверджуються кафедрою.

Види засобів діагностики та процедур оцінювання для поточного та підсумкового контролю дисципліни подано нижче.

Засоби діагностики та процедури оцінювання

ПОТОЧНИЙ КОНТРОЛЬ			ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ	
навчальне заняття	засоби діагностики	процедури	засоби діагностики	процедури
лекції	контрольні завдання за кожною темою	виконання завдання під час лекцій	комплексна контрольна робота (ККР)	визначення середньозваженого результату поточних контролів; виконання ККР під час заліку за бажанням студента
практичні	контрольні завдання за кожною темою	виконання завдань під час практичних занять		

Під час поточного контролю лекційні заняття оцінюються шляхом визначення якості виконання контрольних конкретизованих завдань. Практичні заняття оцінюються якістю виконання контрольного завдання.

Якщо зміст певного виду занять підпорядковано декільком складовим опису кваліфікаційного рівня за НРК, то інтегральне значення оцінки може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюються викладачем.

За наявності рівня результатів поточних контролів з усіх видів навчальних занять не менше 60 балів, підсумковий контроль здійснюється без участі студента шляхом визначення середньозваженого значення поточних оцінок.

Незалежно від результатів поточного контролю кожен студент під час заліку має право виконувати ККР, яка містить завдання, що охоплюють ключові дисциплінарні результати навчання.

Кількість конкретизованих завдань ККР повинна відповідати відведеному часу на виконання. Кількість варіантів ККР має забезпечити індивідуалізацію завдання.

Значення оцінки за виконання ККР визначається середньою оцінкою складових (конкретизованих завдань) і є остаточним.

Інтегральне значення оцінки виконання ККР може визначатися з урахуванням вагових коефіцієнтів, що встановлюється кафедрою для кожного кожної складової опису кваліфікаційного рівня НРК.

6.3 Критерії

Реальні результати навчання студента ідентифікуються та вимірюються відносно очікуваних під час контрольних заходів за допомогою критеріїв, що описують дії студента для демонстрації досягнення результатів навчання.

Для оцінювання виконання контрольних завдань під час поточного контролю лекційних і практичних занять в якості критерія використовується коефіцієнт засвоєння, що автоматично адаптує показник оцінки до рейтингової шкали:

$$O_i = 100 a/m,$$

де a – число правильних відповідей або виконаних суттєвих операцій відповідно до еталону рішення; m – загальна кількість запитань або суттєвих операцій еталону.

Індивідуальні завдання та комплексні контрольні роботи оцінюються експертно за допомогою критеріїв, що характеризують співвідношення вимог до рівня компетентностей і показників оцінки за рейтинговою шкалою.

Зміст критеріїв спирається на компетентнісні характеристики, визначені НРК для бакалаврського рівня вищої освіти (подано нижче).

Загальні критерії досягнення результатів навчання для 6-го кваліфікаційного рівня за НРК

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
Знання		
♦ концептуальні наукові та практичні знання, критичне осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної	Відповідь відмінна – правильна, обґрунтована, осмислена. Характеризує наявність: - концептуальних знань; - високого ступеню володіння станом питання; - критичного осмислення основних теорій, принципів, методів і понять у навчанні та професійній діяльності	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
діяльності та/або навчання	Відповідь містить негрубі помилки або описки	90-94
	Відповідь правильна, але має певні неточності	85-89
	Відповідь правильна, але має певні неточності й недостатньо обґрунтована	80-84
	Відповідь правильна, але має певні неточності, недостатньо обґрунтована та осмислена	74-79
	Відповідь фрагментарна	70-73
	Відповідь демонструє нечіткі уявлення студента про об'єкт вивчення	65-69
	Рівень знань мінімально задовільний	60-64
	Рівень знань незадовільний	<60
Уміння/навички		
♦ поглиблені когнітивні та практичні уміння/навички, майстерність та інноваційність на рівні, необхідному для розв'язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем у сфері професійної діяльності або навчання	Відповідь характеризує уміння: - виявляти проблеми; - формулювати гіпотези; - розв'язувати проблеми; - обирати адекватні методи та інструментальні засоби; - збирати та логічно й зрозуміло інтерпретувати інформацію; - використовувати інноваційні підходи до розв'язання завдання	95-100
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності з негрубими помилками	90-94
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації однієї вимоги	85-89
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації двох вимог	80-84
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації трьох вимог	74-79
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності, але має певні неточності при реалізації чотирьох вимог	70-73
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання в практичній діяльності при виконанні завдань за зразком	65-69
	Відповідь характеризує уміння/навички застосовувати знання при виконанні завдань за зразком, але з неточностями	60-64
	рівень умінь/навичок незадовільний	<60
Комунікація		
	Вільне володіння проблематикою галузі.	95-100

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
♦ донесення до фахівців і нефахівців інформації, ідей, проблем, рішень, власного досвіду та аргументації; ♦ збір, інтерпретація та застосування даних; ♦ спілкування з професійних питань, у тому числі іноземною мовою, усно та письмово	Зрозумілість відповіді (доповіді). Мова: - правильна; - чиста; - ясна; - точна; - логічна; - виразна; - лаконічна. Комунікаційна стратегія: - послідовний і несуперечливий розвиток думки; - наявність логічних власних суджень; - доречна аргументації та її відповідність відстоюваним положенням; - правильна структура відповіді (доповіді); - правильність відповідей на запитання; - доречна техніка відповідей на запитання; - здатність робити висновки та формулювати пропозиції	
	Достатнє володіння проблематикою галузі з незначними хибами. Достатня зрозумілість відповіді (доповіді) з незначними хибами. Доречна комунікаційна стратегія з незначними хибами	90-94
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння проблематикою галузі. Добра зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано п'ять вимог)	74-79
	Задовільне володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та доречна комунікаційна стратегія (сумарно не реалізовано сім вимог)	70-73
	Часткове володіння проблематикою галузі. Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибами (сумарно не реалізовано дев'ять вимог)	65-69
	Фрагментарне володіння проблематикою галузі.	60-64

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Задовільна зрозумілість відповіді (доповіді) та комунікаційна стратегія з хибамі (сумарно не реалізовано 10 вимог)	
	Рівень комунікації незадовільний	<60
Відповідальність і автономія		
♦ управління складною технічною або професійною діяльністю чи проектами; ♦ спроможність нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень у непередбачуваних робочих та/або навчальних контекстах; ♦ формування суджень, що враховують соціальні, наукові та етичні аспекти; ♦ організація та керівництво професійним розвитком осіб та груп; ♦ здатність продовжувати навчання із значним ступенем автономії	Відмінне володіння компетенціями менеджменту особистості, орієнтованих на: 1) управління комплексними проектами, що передбачає: - дослідницький характер навчальної діяльності, позначена вмінням самостійно оцінювати різноманітні життєві ситуації, явища, факти, виявляти і відстоювати особисту позицію; - здатність до роботи в команді; - контроль власних дій; 2) відповідальність за прийняття рішень в непередбачуваних умовах, що включає: - обґрунтування власних рішень положеннями нормативної бази галузевого та державного рівнів; - самостійність під час виконання поставлених завдань; - ініціативу в обговоренні проблем; - відповідальність за взаємовідносини; 3) відповідальність за професійний розвиток окремих осіб та/або груп осіб, що передбачає: - використання професійно-орієнтованих навичок; - використання доказів із самостійною і правильною аргументацією; - володіння всіма видами навчальної діяльності; 4) здатність до подальшого навчання з високим рівнем автономності, що передбачає: - ступінь володіння фундаментальними знаннями; - самостійність оцінних суджень; - високий рівень сформованості загальнонавчальних умінь і навичок; - самостійний пошук та аналіз джерел інформації	95-100
	Упевнене володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано дві вимоги)	90-94
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано три вимоги)	85-89
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано чотири вимоги)	80-84
	Добре володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано шість вимог)	74-79
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано сім вимог)	70-73

Опис кваліфікаційного рівня	Вимоги до знань, умінь/навичок, комунікації, відповідальності і автономії	Показник оцінки
	Задовільне володіння компетенціями менеджменту особистості (не реалізовано вісім вимог)	65-69
	Рівень відповідальності і автономії фрагментарний	60-64
	Рівень відповідальності і автономії незадовільний	<60

7 ІНСТРУМЕНТИ, ОБЛАДНАННЯ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Технічні засоби навчання:

– мультимедійне обладнання;

Дистанційна платформа MOODLE, MS Teams.

8 РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

8.1 Основна література

1. A Course in the Calculus of Variations: Optimization, Regularity, and Modeling (F. Santambrogio) — Springer Universitext, 2023.
2. Introduction to the Calculus of Variations and Control with Modern Applications (T. Burns) — Routledge, 2021.
3. Applied Calculus of Variations for Engineers (3rd ed.) — CRC/Chapman & Hall, 2020.
4. Варіаційне числення та методи оптимізації: навчальний посібник / М. І. Клименко, С. П. Швидка. Запоріжжя : ЗНУ, 2020.
5. Основи варіаційного числення. Посібник з курсу «Варіаційне числення». ДДМА. — (датовано 2021).

8.2 Допоміжна література

1. Calculus of Variations (F. Rindler) — Springer, 2019.
2. Calculus of Variations: An Introduction to the One-Dimensional Case (D. Hildebrand) — Springer, 2019.

9. ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Література на сайті кафедри прикладної математики:
<https://vm.nmu.org.ua/metod.html>;

Навчальне видання

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«Елементи варіаційного числення» для бакалаврів
спеціальності 113 Прикладна математика

Розробник: Шпорта Анна Григорівна

В редакції автора

Підготовлено до виходу в світ
у Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19