

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**



**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ «ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»**

ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН І ТЕОРІЇ ГРАФІВ

*ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ
СПЕЦІАЛЬНОСТІ 192 «БУДІВНИЦТВО ТА ЦИВІЛЬНА ІНЖЕНЕРІЯ»*

**Дніпро
2021**

УДК 519.1

Кагадій Т.С., Сушко Л.Ф. Основи теорії множин і теорії графів: методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія». – Дніпро: ДДАЕУ. – 2021. – 60 с.

В методичних рекомендаціях наведено основні теоретичні відомості з дисципліни «Основи системного аналізу», що проілюстровано прикладами, рисунками, зразками розв'язування типових задач, де кожний розділ містить запитання та задачі для перевірки засвоєння матеріалу. Методичні рекомендації містять завдання для семестрових індивідуальних розрахунково-графічних робіт, розрахованих на кожного студента академічної групи.

Методичні матеріали орієнтовано на активізацію навчальної діяльності студентів денної та заочної форми навчання та спрямування їх у напрямі творчого практичного опрацювання матеріалу з дисципліни «Основи системного аналізу».

Укладачі:

д. ф.-м. н., проф.
ст. викл.

Т.С. Кагадій
Л.Ф. Сушко

Розглянуто та схвалено на засіданні кафедри вищої математики та фізики
(протокол № 9 від 02.02.2021 р.).

Схвалено науково-методичною радою інженерно-технологічного факультету
Протокол № 7 від 4 березня 2021 року

Рецензент: **О.О. Сдвижкова**, д. т. н., проф., зав. каф. вищої математики
НТУ «Дніпровська політехніка»

© Т.С. Кагадій, Л.Ф. Сушко, 2021

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ 1. Основи теорії множин	5
1.1. Основні визначення	5
1.2. Операції з множинами	7
1.3. Розбивка множин	9
1.4. Декартов добуток множин	11
1.5. Відношення	12
1.6. Властивості відношень	14
1.7. Відповідність, відображення і функції	16
Розділ 2. Основи теорії графів	20
2.1. Основні положення	20
2.2.. Неорієнтовані графи.	24
2.3. Ізоморфізм графів.	25
2.4. Відношення порядку і відношення еквівалентності на графі.	26
2.5. Характеристики графів.	27
2.6. Ейлерові графи і гамільтонові цикли	29
2.7. Розрахунок мережного графіка	30
2.8. Оптимізація на мережах	35
Розділ 3. Варіанти розрахунково-графічного завдання ...	41
Література	60

ВСТУП

Точний опис об'єктів виробничої, економічної й інших сфер діяльності людини пов'язаний з необхідністю виміру великої кількості змінних або параметрів. У ряді випадків змінні, що беруть участь у системі контролю або керування такі, що безупинний вимір їх значення просто неможливий через величезну кількість даних, що обробляються.

Вихід із цієї ситуації полягає в переході до дискретних уявлень про вимірювані параметри. Це дозволяє виконувати виміри тільки в деякі фіксовані моменти часу. Такі вимірювання неминуче знижують точність представлення об'єкта дослідження й одночасно спрощує його модель. Правомірність переходу до дискретного представлення повинна бути старанно обґрунтована.

Саме таке обґрунтування дають основні розділи дискретної математики – множини та графи. Розділи, присвячені множинам, є основою для інших розділів дискретної математики. Розглядаються основні операції з множинами, поняття декартового добутку, відношення і їх властивості, а також відповідності відображення і функції.

Теорія графів є сучасним розділом прикладної математики, що часто застосовують в інженерних розрахунках та для ілюстрації результатів. В системному аналізі теорія графів може використовуватись, як одна з основних мов викладання цієї дисципліни разом з теорією множин та теорією відносин. Задачі про пошук найкоротшого шляху в зваженому графі має безпосереднє відношення до розрахунків трубопроводів, при проектуванні розгалужених мереж може використовуватись теорія дерев. За допомогою графів зручно демонструвати систему керування та ієрархію об'єктів водопостачання, проводити оптимізацію. Тому самостійне вивчення та виконання розрахункового завдання дуже корисне для студентів та має прикладний характер.

Всі питання, що поставлені студентам у розрахунковому завданні докладно викладено в лекційному матеріалі. Наведено приклади розв'язання аналогічних задач.

Розділ 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Основні визначення

Множина - це деякий набір об'єктів, які не повторюються і називаються елементами. Вона позначається в такий спосіб

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\},$$

де A - множина, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - її елементи. Наприклад, множина A може складатися з натуральних чисел 1, 2, ..., 6, при цьому її елементами будуть $\alpha_1=1, \alpha_2=2, \dots, \alpha_6=6$.

Будь-який набір, кожний елемент якого належить множині A , є його підмножиною, так $B = \{1, 2, 3\}$ - підмножина $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, позначається $B \subset A$. Довільна множина по цьому визначенню є власною підмножиною.

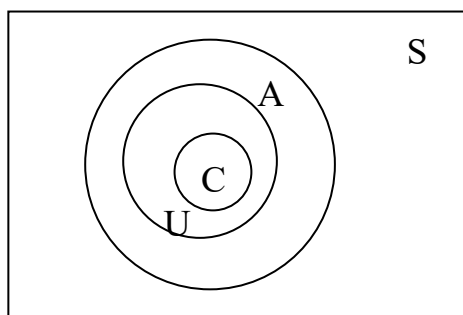
Усі використані в дискретній математиці множини містять елементи, що належать найбільшій множині S , яка називається простором елементів. Отже, всі використані множини - підмножини S .

Приклад. Нехай $S = \{1, 2, \dots, 6\}$. Розглянемо формування підмножин множини S . З урахуванням порожньої підмножини $\emptyset$ в множині S може бути виділене в цілому $2^6 = 64$ підмножини:

$$\emptyset, \{1\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, 6\}, \dots, S.$$

У загальному випадку, якщо множина S містить n елементів, у ній можна виділити 2^n підмножин.

Однією з причин застосування теорії множин у дискретній математиці є те, що для множин визначені важливі перетворення, що мають просте геометричне зображення. Це зображення зветься діаграмою Ейлера-Вена і у ній простір S зображається у вигляді квадрата, а різноманітні множини - у вигляді плоских фігур, обмежених замкненими лініями. Використання таких діаграм розглянемо на прикладі опису підмножин (рис.1.1).



$$C \subset U \subset A$$

Рис.1.1. Діаграма Ейлера-Вена для визначення множин

Звичайно кожне натуральне число сприймається як те спільне, що властиве будь-якій сукупності M , яка складається з m предметів; про це

роблять запис вигляду $m = |M|$. Якщо усі m предметів із сукупності M попарно різноманітні, то сукупність цю іменують множиною, а також *m-елементною множиною*, при цьому число m називають *кардинальним числом*, а також *потужністю* множини M .

Якщо $|M| = 0$, то кажуть, що M - *порожня множина* і пишуть $M = \emptyset$. Якщо серед предметів, що входять у сукупність M , є однакові, то таку сукупність називають *мультимножиною*.

Кажучи про множину M , припускають, що M складається з елементів. Множину, що складається з кінцевого числа елементів, тобто має кінцеву потужність називають *кінцевою*. Множина, що не є кінцеве, називають *нескінченною*. Якщо x - елемент множини M , то цей факт записують у вигляді $x \in M$ і кажуть "х належить M ". Запис $x \in M \mid P(x)$ означає, що розглядається множина, яка складається з елементів, що володіють властивістю P , а записи $M_1 = \{x \in M : P(x)\}$ і аналогічний $M_1 = \{x \in M \mid P(x)\}$ - що розглядається частина множини M , причому $x \in M_1 \Leftrightarrow (x \in M \& P(x))$. (Позначення: $A \Rightarrow B$ - із твердження A випливає твердження B ; $A \Leftrightarrow B$ - з A випливає B і навпаки).

Можливо, що $M_1 = \emptyset$ або $M_1 = M$. У будь-якому випадку про множину M_1 кажуть, що вона - підмножина множини M або співпадає з нею і пишуть $M_1 \subseteq M$. Якщо $M_1 \subseteq M$ і $M \subseteq M_1$, то пишуть $M_1 = M$ та називають M_1 і M рівними множинами. Якщо $M_1 \subseteq M$, але $M_1 \neq M$, то пишуть $M_1 \subset M$, тобто M_1 *строго включена* в M . Якщо ж просто $M_1 \subseteq M$, то кажуть про *включення* M_1 у M .

Нехай $A \subseteq \mathbb{R}$. Тоді надалі $A^+ = \{x \in A : x > 0\}$, так що $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^+$.

Якщо хоча б одним способом можна пронумерувати (перерахувати) за допомогою усіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$ всі елементи нескінченної множини M , то кажуть, що M має *зліченну потужність* або є *зліченною множиною*, і пишуть $|M| = |\mathbb{N}|$. Замість $|\mathbb{N}|$ пишуть іноді одну букву $\aleph$ (готичне а). Наприклад, множина $\mathbb{Z}$ зліченна, тому що це легко вбачається в наступному записі чисел одне під іншим :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}, \\ \mathbb{N} &= \{ \dots, 6, 4, 2, 0, 1, 3, 5, \dots \}. \end{aligned}$$

У загальному випадку, якщо між елементами множин X і Y можна встановити взаємно однозначну відповідність (тобто кожному елементу $x \in X$ поставити у відповідність один і тільки один елемент $y \in Y$, але так, щоб при цьому кожному $y \in Y$ також буде поставлений у відповідність деякий елемент $x \in X$), то кажуть, що множини X і Y мають те саме кардинальне число, або мають однакову потужність, або є *рівнопотужними* і пишуть $|X| = |Y|$.

1.2. Операції з множинами

Рівність множин. Множини A і B рівні тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A є елементом множини B , і навпаки, кожний елемент множини B є елементом множини A , тобто

$$A \subset B \text{ і } B \subset A$$

Рівність множин A і B показана за допомогою діаграми Ейлера-Вена (рис.1.2).

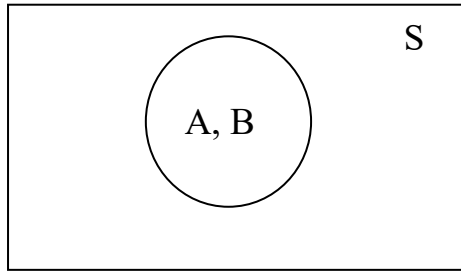


Рис.1.2. Рівність множин

Об'єднання множин. Об'єднанням або сумою двох множин A и B називається множина, що складається з усіх елементів, кожний із яких належить хоча б одному з даних множин (рис.1.3).

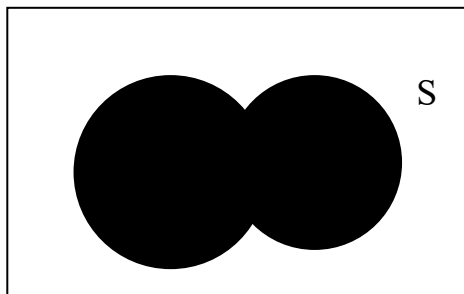


Рис.1.3. Об'єднання множин

Виконуються закони:

1. Асоціативний

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C.$$

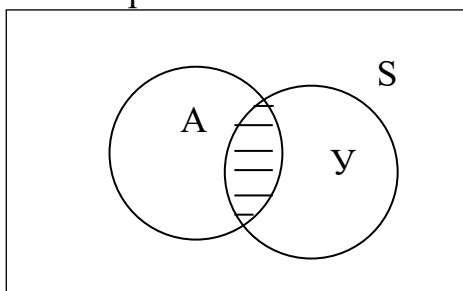
2. Комутативний

$$A \cup B = B \cup A; A \cup A = A;$$

$$A \cup \emptyset = A;$$

$$A \cup S = S; A \cup B = A, \text{ якщо } B \subset A.$$

Перетинання множин. Перетинанням або добутком двох множин називається множина, що складається із усіх тих елементів, які належать обом множинам (рис 1.4). Для цієї операції праведливі комутативний і асоціативний закони. Зокрема:



$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Рис.1.4. Перетинання множин

Дві множини A і B є взаємовиключальними, або несумісними, якщо $A \cap B = \emptyset$.

Доповнення множин. Доповненням множини A називається множина, у якій містяться всі елементи простору S , крім тих, що належать множині A . Воно позначається через $\bar{A}$ (рис.1.5).

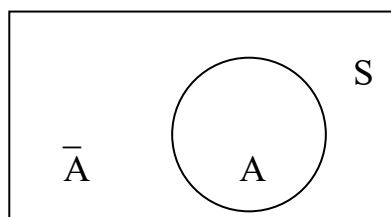


Рис.1.5. Доповнення множин

Справедливими будуть такі вирази

$$\bar{\emptyset} = S; \quad \bar{S} = \emptyset; \quad (A) = \bar{\bar{A}}; \quad A \cup \bar{A} = S; \\ A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

$$\bar{A} \subset \bar{B} \text{ при } B \subset A;$$

$$\bar{A} = \bar{B}, \text{ якщо } A = B.$$

Крім того, справедливі закони де - Моргана:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Різниця множин. Різниця $A-B$ множин A і B є множина, що складається з елементів множини A , які не належать множині B (рис.1.6)

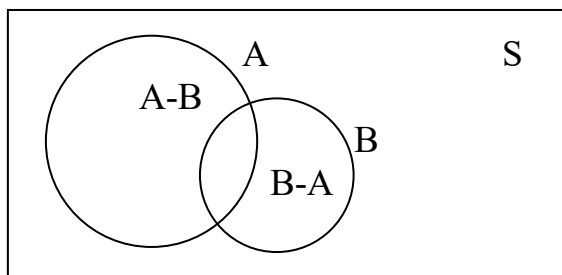


Рис.1.6. Різниця множин

З останньої діаграми виведені такі співвідношення

$$A - \emptyset = A, \quad A - S = \emptyset, \quad S - A = \bar{A}.$$

Вираз, де є різниця, необхідно записувати зі скобками.

Описані вище операції з множинами продемонструємо прикладом.

Приклад. Припустимо, що елементи простору S - натуральні числа від 1 до 6, тобто $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, визначимо такі підмножини

$$A = \{2, 4, 6\}; \quad B = \{1, 2, 3, 4\}; \quad C = \{1, 3, 5\}.$$

З огляду на наведені співвідношення можна записати:

$$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \quad (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$\begin{aligned}
(A \cup B \cup C) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S = A \cap C, \\
A \cap B &= \{2, 4\}, B \cap C = \{1, 3\}, A \cap C = \emptyset, \\
A \cap B \cap C &= \emptyset, \bar{A} = \{1, 3, 5\} = C, \bar{B} = \{5, 6\}, \\
\bar{C} &= \{2, 4, 6\} = A, A - B = \{6\}, B - A = \{1, 3\}, \\
A - C &= \{2, 4, 6\} = A, C - A = \{1, 2, 5\} = C, \\
B - C &= \{2, 4\}, C - B = \{5\}.
\end{aligned}$$

Для закріплення матеріалу рекомендується проілюструвати наведені вище операції з використанням діаграм Ейлера – Вена.

1.3. Розбиття множин

Поняття розбиття множини. Нехай A - множина учнів якийсь школи. Позначимо через A_1 множину учнів першого класу, A_2 - множину учнів другого класу і т.д., A_{10} -множина учнів десятого класу цієї школи. Ясно, що $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ - підмножини множини A , причому кожна з них не порожня (у кожному класі, звичайно, є учні), вони попарно не мають загальних елементів (не може та сама людина навчатися одночасно в двох різних класах), і об'єднання всіх дорівнює A .

Говорять, що сукупність підмножин множини M утворить її розбиття, якщо кожне з цих підмножин не порожньо, будь-які два з них не мають загальних елементів і об'єднання всіх їх дорівнює M .

Таким чином, у прикладі, розглянутому вище, сукупність підмножин $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ утворить розбиття множини A .

Приклад. Якщо $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то сукупність підмножин $\{1, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{5\}$ множини A утворять її розбиття, а сукупність підмножин $\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{3, 6\}$ розбиття не утворять, тому що два з них мають спільний елемент.

Приклад. Якщо $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, то сукупності її підмножин $\{a, b, c\}, \{d, e, f, g\}$ і $\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f, g\}$ утворять його розбиття, але різні. Тобто B розділено на підмножини по-різному.

Розбиття будемо позначати малими літерами грецького алфавіту: ρ, σ, δ і т.д.

Класи розбиття. Нехай M - множина і ρ - деяке її розбиття. Кожне з підмножин сукупності, що утворить розбиття ρ , називається класом розбиття.

Приклад. Якщо $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ і ρ - розбиття множини B , утворене сукупністю її підмножин $\{a, b\}, \{e, d, f\}, \{c\}, \{g\}$, то кожне з цих підмножин є класом даного розбиття ρ .

Якщо тепер зобразити множину за допомогою діаграми Ейлера-Вена, то її розбиття можна уявити наочно, у вигляді розірваного на частини кола (рис.1.7). Кожна така частина і є класом даного розбиття.

У тому самому класі розбиття множини M може утримуватися декілька (і навіть нескінченно багато) елементів із M . Якщо елементи $x, y \in M$ належать тому самому класу даного розбиття ρ , то цей факт ми будемо позначати в

такий спосіб: $x \sim y(\rho)$. Наприклад, для розглянутого вище розбиття σ множини B можна записати $a \sim b(\sigma)$, $d \sim e(\sigma)$, ..., а запис $c \sim d(\sigma)$ помилковий, тому що c і d належать різним класам розбиття σ . Оскільки елементи a і a , звичайно, лежать

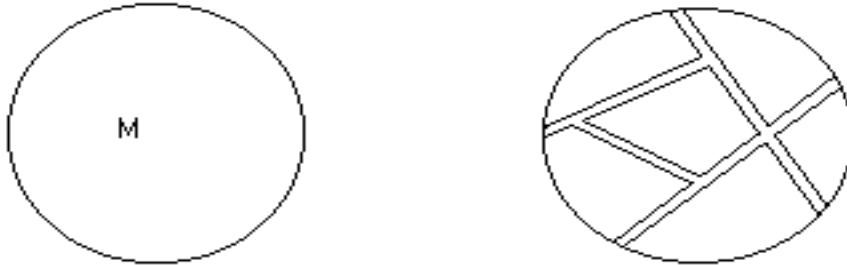


Рис.1.7. Розбиття множини

у тому самому класі розбиття, тому що це один і той же елемент, то можна записати $a \sim a(\sigma)$. Аналогічно $b \sim b(\sigma)$, $c \sim c(\sigma)$ і т.д.

Нехай далі для розбиття ρ множини M і деяких $x, y, z \in M$ має місце $x \sim y(\rho)$ і $y \sim z(\rho)$. Запис $x \sim y(\rho)$ означає, що елементи x і y належать тому самому класу нашого розбиття. Аналогічно y і z знаходяться в одному й тому ж класі. Якщо тепер припустити, що x і z лежать у різних класах розбиття ρ , то одержимо, що ці класи мають загальний елемент y , а це неможливо. Виходить, $x \sim z(\rho)$.

Таким чином ми довели, що якщо $x \sim y(\rho)$ і $y \sim z(\rho)$, то $x \sim z(\rho)$.

Кожний клас даного розбиття ρ множини M , по визначенню, не порожній, тобто в кожному класі знаходяться елементи з M .

Наприклад, для розбиття σ множини B , розглянутих вище, клас розбиття $\{a, b\}$ можна позначити $\bar{a}$, тому що він містить елемент a . Але цей же клас містить і елемент b , виходить, його можна позначити $\bar{b}$. Таким чином, $\{a, b\} = \bar{a} = \bar{b}$. Аналогічно $\{e, d, f\} = \bar{e} = \bar{d} = \bar{f}$.

У нас вийшло, що той самий клас розбиття позначається по-різному. Це не повинно вас здивовувати. І в математиці, і в житті ви не раз зустрічалися з такою ситуацією. Наприклад, дроби $1/2$, $2/4$, $3/6$, ... - це ті самі числа, що позначаються по-різному.

Повернемося тепер до загального випадку розбиття ρ множини M . Якщо деякий клас розбиття містить елементи x і y множини M , то, з одного боку, він позначається $\bar{x}$, а з іншого - $\bar{y}$, тобто $\bar{x} = \bar{y}$. Таким чином ми довели, що з $x \sim y(\rho)$ випливає $\bar{x} = \bar{y}$.

Нехай тепер, навпаки $\bar{x} = \bar{y}$. Але $\bar{x}$ - це клас, що містить елемент x , і ці класи рівні, тобто це той самий клас. Виходить, x і y знаходяться в тому

самому класі розбиття, тобто $\bar{x} \sim \bar{y}(\rho)$. З наведених вище міркувань ми можемо зробити такий висновок: $\bar{x} = \bar{y}$ тоді і тільки тоді, коли $x \sim y(\rho)$.

Фактор-множина. Розглянемо побудоване вище розбиття σ множини B . Підмножини $\{a, b\}$, $\{e, d, f\}$, $\{c\}$, $\{g\}$ є класами цього розбиття. Згідно з нашою домовленістю їх можна позначити, наприклад, $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{c}$, $\bar{g}$ відповідно. Таким чином, із розбиттям σ пов'язана сукупність його класів розбиття, тобто множина $\{\bar{a}, \bar{e}, \bar{c}, \bar{g}\}$.

В загальному випадку, якщо ρ - деяке розбиття довільної множини M , то з цим розбиттям пов'язана сукупність його класів.

Сукупність усіх класів даного розбиття ρ множини M називається фактор-множиною множини M за розбиттям ρ і позначається M/ρ .

Таким чином, елементами множини M/ρ є класи даного розбиття ρ та інших елементів у ньому немає.

Якщо ми повернемося до розбиття ρ множини M , наведеному на рис.1.7, то множина M/ρ складається зі шматків (рис.1.8), на які ми розрізали коло, що зображує множину M . Далі для нашого розбиття множини B маємо $B/\sigma = \{\bar{a}, \bar{e}, \bar{c}, \bar{g}\}$. Відомо, що елементи множини B/σ можна позначити по-іншому і тоді, наприклад, $B/\sigma = \{\bar{b}, \bar{f}, \bar{c}, \bar{g}\}$.

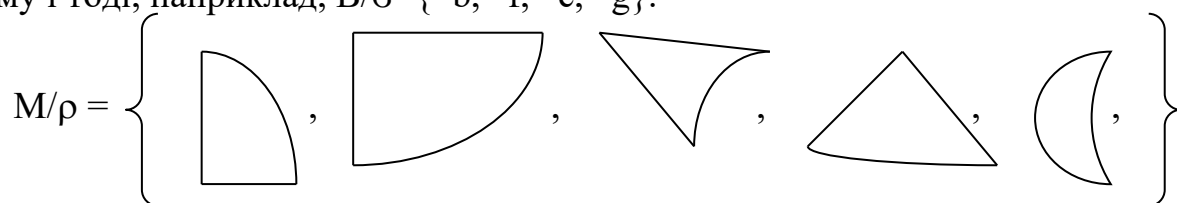


Рис.1.8. Компоненти розбитої множини

Нехай тепер δ - розбиття множини B , класами якого є підмножини $\{a, b, c, d\}$, $\{e, f, g\}$. Тоді $B/\delta = \{\bar{a}, \bar{e}\}$. Звертаємо вашу увагу на те, що $\bar{a}$ в B/σ і $\bar{a}$ в B/δ - це різні елементи. Наприклад, кінотеатр "Мир" у Мінську і кінотеатр "Мир" у Москві - це різні кінотеатри, і хоча вони називаються однаково, це не викликає непорозумінь. Не буде їх і в нашому випадку з розбиттями, тому що завжди ясно про яке розбиття йде мова.

Зауважимо, що M/ρ - це сукупність лише деяких (не усіх) підмножин множини M , а 2^M - сукупність усіх. Виходить, що $M/\rho \subset 2^M$, більш того, M/ρ - власна підмножина множини 2^M .

Отже якщо множина M скінченна, то і будь-яка його фактор-множина в залежності від розбиття може бути як скінченна, так і нескінченна.

1.4. Декартів добуток множин

Розглянемо деякі додаткові терміни, характерні для операцій над множинами.

Вектор - це упорядкований набір елементів, інший синонім цього терміна - “кортеж”.

Елементи, що утворюють вектор, називаються координатами або компонентами вектора. Координати нумеруються зліва направо. Число координат називається довжиною або вимірністю вектора. Вектор будемо брати в круглі дужки, наприклад $(0, 5, 4, 5)$. Іноді дужки і навіть коми опускаються.

Вектори довжини 2 часто називаються упорядкованими парами.

Два вектори рівні, якщо вони мають однакову довжину і відповідні координати їх рівні. Інакше кажуть, вектори $(a_1, \dots, a_m)$ і $(b_1, \dots, b_n)$ рівні, якщо $m = n$ і $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_m = b_n$.

Прямим (декартовим) добутком множин A і B (позначають $A \times B$) називається множина усіх пар (a, b) , таких що $a \in A$ і $b \in B$. Зокрема, якщо $A=B$, то обидві координати належать A . Такий добуток позначається A^2 . Аналогічно прямим добутком множин $A_1, \dots, A_n$ (позначення $A_1 \times \dots \times A_n$) називається множина усіх векторів $(a_1, \dots, a_n)$ довжини n таких, що $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$. $A \times A \times \dots \times A$ і позначається A^n .

Приклад. Множина $R \times R = R^2$ - це множина точок площини, точніше пар (a, b) , де $a, b \in R$ і є координатами точок площини.

Приклад. Якщо $A = \{a, u, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{1, 2, \dots, 8\}$, тоді $A \times B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, h_7, h_8\}$ - множина, що містить позначення всіх 64 клітин шахівниці.

Приклад. Розглянемо множину числових матриць 3×4 , тобто матриць вигляду

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right|,$$

де a_{ij} належить множині R дійсних чисел. Рядки матриці - це елементи множини R^4 (вектори вимірністю 4). Сама матриця, розглянута як упорядкований набір (тобто вектор) рядків, - це елемент множини $(R^4)^3 = R^4 \times R^4 \times R^4$. Компоненти матриці, заданої в такий спосіб, - рядки, а не числа. Тому $(R^4)^3 \neq R^{12}$. Змістовний сенс цієї нерівності в тому, що у векторі R^{12} не міститься ніякої інформації про будову матриці, той же вектор міг би перераховувати елементи 4×3 або 2×6 , що як математичні об'єкти не збігаються з матрицями 3×4 .

1.5. Відношення

Підмножина $R \subseteq M_n$ називається n -місцевим відношенням на множину M . Кажуть, що $a_1, \dots, a_n$ знаходиться у відношенні R , якщо $(a_1, \dots, a_n) \in R$. Одномісне відношення - це просто підмножина M . Такі відношення називають ознаками: a має ознаку R , якщо $a \in R$ і $R \subseteq M$. Властивості одномісних відношень - це властивості підмножин M ; тому для випадку $n=1$ термін відношення вживається рідко. Прикладом тримісного відношення є множина трійок

нападаючих у хокейній команді. Кожний із нападаючих знаходиться в цьому відношенні з усіма тими гравцями, з якими він грає в трійці.

Найчастіше зустрічаються і найкраще вивчені двомірні або бінарні відношення. Якщо a і b знаходяться в бінарному відношенні R , то записують так $a R b$.

Приклад. Відношення на N (де N - множина позитивних чисел):

- 1) відношення $\leq$ виконується для пар $(7, 9)$ і $(7, 7)$, але не виконується для пар $(9, 7)$;
- 2) відношення “мати спільний ділянок, відмінний від одиниці” виконується для пар $(6, 9)$, $(4, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 4)$, але не виконується для пар $(7, 9)$ і $(9, 7)$;
- 3) відношення “бути ділянком” - $a R b$ (a ділянок b) - виконується для пар $(2, 4)$ і $(4, 4)$, але не виконується для пар $(4, 2)$ і $(7, 9)$.

Приклад. Відношення на множині точок дійсної площини:

- 1) відношення “знаходитися на однаковій відстані від початку координат” виконується для пар точок, які знаходяться на одному й тому ж колі з центром на початку координат;
- 2) відношення “знаходитися на різній відстані від початку координат” виконується для тих і тільки тих пар точок, для яких не виконується попереднє відношення;
- 3) відношення “бути симетричним щодо осі X ” виконується для усіх пар точок (x_1, y_1) і (x_2, y_2) , що задовольняють умові $x_1 = x_2$ і $y_1 = -y_2$.

Приклад. Відношення на множині людей: “жити в одному місті”, “бути молодше”, “бути сином”, “бути відомим”.

Нехай дане відношення R і M . Для будь-якої підмножини $M_1 \subseteq M$ природно визначається відношення R' , називане звуженням R на M_1 , воно утворюється з R видаленням усіх пар, що містять елементи, які не належать множині M_1 . Іншими словами $R' = R \cap M_1^2$. Строго кажучи, R і R' - це різні відношення з різними областями визначення. Проте, якщо не виникає протиріч, цей педантизм не дотримується; наприклад, цілком можна говорити “бути ділянком” не уточнюючи, задано воно на N або якійсь його підмножині.

Для завдання бінарних відношень можна використовувати будь-які засоби завдання множин, наприклад список пар, для яких дане відношення виконується. Відношення на кінцевих множинах звичайно задаються списком або матрицею. Матриця, що задає бінарні відношення на множині $M = \{a_1, \dots, a_m\}$, - це квадратна матриця з порядком m , у якій елемент c_{ij} , що стоїть на перетинанні i -го рядка і j -го стовпчика, визначається в такий спосіб:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_i R a_j; \\ 0 & \text{- у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Приклад. Для кінцевої множини $\{1, 2, \dots, 6\}$ матриці відношень $\leq$, “має спільний дільник”, “бути дільником” мають вигляд:

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	0	1	1	1	0	1

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

Для будь-якої множини M відношення E , задане матрицею, у якій по головній діагоналі стоять одиниці, а в інших місцях - нулі, називається відношенням рівності на M .

Оскільки відношення на M задаються підмножинами M^2 , для них можна визначити ті ж операції, що і над множинами.

Визначимо ще одну операцію над відношеннями. Відношення є зворотним до R (позначається R^{-1}), якщо $a_i R^{-1} a_j$ тоді і тільки тоді, коли $a_i R a_j$. Так для відношення $\leq$ зворотним є $\geq$.

1.6. Властивості відношень

Відношення R називається рефлексивним, якщо для будь-якого $a \in M$ має місце aRa . Головна діагональ його матриці містить тільки одиниці. Відношення R називається антирефлексивним, якщо ні для одного з $a \in M$ не виконується aRa . Головна діагональ його матриці містить тільки нулі.

Наприклад, відношення $\leq$ і “має спільний дільник” - рефлексивні, відношення $<$ і “бути сином” - антирефлексивні.

Відношення R називається симетричним, якщо для пар $(a, b) \in M^2$ з aRb випливає bRa . Інакше кажучи, для довільної пари відношення R виконується або в обидві сторони або не виконується взагалі. Матриця симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі: $a_{ij} = a_{ji}$.

Приклад. Відношення “бути симетричним щодо осі X ”.

Відношення R називається антисиметричним, якщо з $a_i R a_j$ і $a_j R a_i$ випливає, що $a_i = a_j$. Відношення “бути симетричним”: якщо перша точка симетрична другій, то і друга симетрична першій.

Приклад. Приклад антисиметричного відношення: відношення $\leq$ дійсно, якщо $a \leq b$ і $b \leq a$, то $a = b$. Неважко переконатися в тому, що відношення R симетрично тоді і тільки тоді, коли $R = R^{-1}$.

Відношення R називається транзитивним, якщо для будь-яких a, b і c із aRb і bRc випливає aRc .

Приклад. Відношення “рівність”, $\leq$, “жити в одному й тому ж місті” транзитивне; відношення “бути сином” не транзитивне.

Для будь-якого відношення R відношення $\hat{R}$, називане транзитивним замиканням R , визначається в такий спосіб: $a \hat{R} b$, якщо, у M існує ланцюжок із n елементів $a = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = b$, у якому між сусідніми елементами виконане R : $a_1 R a_2, a_2 R a_3, \dots, a_{n-1} R a_n$. Якщо R транзитивне, то $\hat{R} = R$. Дійсно, якщо $a R b$, то $a \hat{R} b$ (ланцюжок складається з двох елементів a, b), тому $R \subseteq \hat{R}$. Якщо ж $a \hat{R} b$, то існує ланцюжок $a_1 R a_2, a_2 R a_3, \dots, a_{n-1} R a_n$. Але оскільки R транзитивне, то $a R b$, тому $\hat{R} \subseteq R$. З включення в обидві сторони випливає $R = \hat{R}$.

Транзитивним замиканням відношення “бути сином” є відношення “бути прямим нащадком”, що є об'єднанням відношень “бути сином”, “бути онуком”, “бути правнуком” і т. д.

Відношення еквівалентності. Відношення називається відношенням еквівалентності, якщо воно рефлексивно, симетрично і транзитивне.

Приклад. Відношення рівності E на будь-якій множині є відношенням еквівалентності. Рівність - це мінімальне відношення еквівалентності в тому сенсі, що при видаленні довільної пари з E (тобто будь-якої одиниці на діагоналі матриці E) воно перестає бути рефлексивним і, отже, уже не є еквівалентністю.

Приклад. Розглянемо множину трикутників на площині, рахуючи, що трикутник заданий, якщо задані координати його вершин. Два трикутники називаються рівними, якщо при накладенні вони збігаються, тобто можуть бути переведені одне в одне шляхом деякого переміщення. Відношення рівності (конгруентності) є відношенням еквівалентності на множині трикутників.

Приклад. Відношення “мати той самий залишок від ділення на 7” є еквівалентністю на множині цілих позитивних чисел N . Це відношення виконується, наприклад, для пар $(11, 46), (14, 70)$ і не виконується для пар $(12, 13), (14, 71)$.

Відношення називається відношенням нестрогого порядку, якщо воно рефлексивно, антисиметричне і транзитивне. Відношення суворого порядку - антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне. Множина M , на якій задано відношення порядку, називається цілком упорядкованим, якщо будь-які два елементи M порівняні, і частково упорядкованим у протилежному випадку.

Приклад. Відношення $\leq$ і $\geq$ для чисел є відношеннями нестроогого порядку, відношення $<$ і $>$ - відношеннями суворого порядку. Обидва типи відношень цілком упорядковують множину N .

Приклад. На системі підмножин множини M відношення включення $\subseteq$ задає нестрогий частковий порядок, а відношення суворого порядку включення $\subset$ задає суворий порядок. Наприклад, $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$, а $\{1, 2\}$ і $\{1, 3, 4\}$ не можуть порівнюватися.

Приклад. Відношення підпорядкованості на підприємстві задає суворий частковий порядок. У ньому непорівняними будуть співробітники різних відділів.

Приклад. Нехай у списку кінцевого алфавіту A порядок літер зафіксований, тобто завжди той самий. Тоді цей список визначає повне упорядкування літер, що назвемо відношенням передування й позначимо $a_i < a_j$ (якщо a_i передує a_j у списку літер). На відношенні передування літер будується відношення передування слів. Це відношення задає повне упорядкування множини усіх кінцевих слів в алфавіті A , що називається лексикографічним упорядкуванням слів. Прикладом такого упорядкування є словник.

Приклад. Якщо розглядати числа в позиційних системах числення (напр. десяткової) як слова в алфавіті цифр, то їх лексикографічне упорядкування збігається зі звичним, якщо всі числа, що порівнюються, мають однакове число розрядів. Наприклад:

$$\begin{aligned}20 &< 1073; \\20 &> 1073; \\0020 &< 1073.\end{aligned}$$

Таким чином, відношення упорядкування для множин залежить від додаткових факторів, що пов'язані з характеристиками елементів цих множин.

1.7. Відповідність, відображення і функції

Відповідність. Відповідністю між множинами A і B називається підмножина $G \subseteq A \times B$. Відповідність G називається функціональною або однозначною, якщо образом будь-якого елемента множини G_1 є єдиний елемент множини G_2 , причому $G_1, G_2 \subseteq G$.

Приклад. Англійсько-російський словник встановлює відповідність між множиною англійських і російських слів. Ця відповідність не є функціональною.

Функцією називається функціональна відповідність. Якщо функція f встановлює відповідність між множинами A і B , то кажуть, що функція f має тип $A \rightarrow B$ (позначення $f : A \rightarrow B$). Цілком визначена функція $f : A \rightarrow B$ називається відображенням A в B . Образ A при відображенні f позначається $f(A)$.

Якщо $f(A)$ складається з єдиного елемента, то f називається функцією-константою.

Відображення типу $A \rightarrow A$ називається перетворенням множини A .

Важливим поняттям при побудові математичних моделей дискретної математики є поняття *відношення* між елементами двох множин. Якщо для кожного елемента $x \in X$ можна сказати, що елемент x знаходиться або не знаходиться в даному відношенні α з елементом $y \in Y$, то кажуть, що між елементами множини X і Y задане відношення α і пишуть $x \alpha y$ у тому випадку, коли x знаходиться у відношенні α з елементом y . Наприклад, між множиною X студентів даного курсу і множиною Y усіх навчальних предметів за даною спеціальністю існує відношення α таке, що $x \alpha y$ означає "студент x склав екзамен з предмету y ". Між елементами множин X і Y може існувати багато різноманітних змістовних відношень, якщо X та Y - змістовні множини. Наприклад, такими відношеннями є всілякі *функціональні* відношення або *відображення*.

Відношення α між елементами множин X і Y називають відображенням множини X в множину Y , якщо кожний елемент $x \in X$ обов'язково знаходиться у відношенні з деяким елементом $y \in Y$, причому цей елемент $y \in Y$ - єдиний для даного елемента $x \in X$. Відображення множини X в множину Y позначають через φ (або іншою підходящою буквою) і пишуть $\varphi: X \rightarrow Y$, при цьому замість $x \varphi y$ для $x \in X$ і $y \in Y$ часто пишуть $y = \varphi(x)$ і кажуть, що y є зображення елемента x при відображенні. На рисунку відображення $\varphi: X \rightarrow Y$ зручно наводити у вигляді *двочасткового графа*. Розглянемо приклад (рис.1.9).

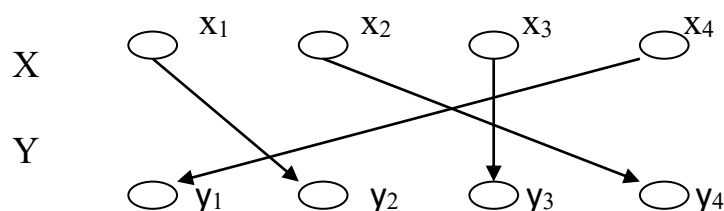


Рис.1.9. Двочастковий граф

Тут точки верхнього ряду зображують елементи множини X , нижнього ряду - множини Y , і якщо має місце $y = \varphi(x)$, то з точки x виходить стрілка, що заходить або входить у точку y . Таку форму представлення називають *двочастковим графом відображення* $\varphi: X \rightarrow Y$, причому точки цього рисунка іменують вершинами графа, а стрілки - дугами графа і кажуть, що відображення $\varphi \in$:

- а) ін'єктивним, якщо в кожну вершину $y \in Y$ заходить або входить не більш однієї дуги ;
- б) сюрєктивним, якщо в кожну вершину $y \in Y$ входить не менше однієї дуги ;
- в) бієктивним, або бієкцією, якщо φ ін'єктивно і сюрєктивно одночасно.

Для будь-якого відображення $\varphi : X \rightarrow Y$ і будь-якої не порожньої підмножини $A \subseteq X$ множина образів усіх елементів $x \in A$ при відображенні φ називають образом множини A і позначають $\varphi(A)$, так що $\varphi(A) = \{y \in Y : y = \varphi(x) \text{ для деякого } x \in A\}$.

Для спільності і стрункості суджень приймається $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Якщо $\varphi(X) = Y$, то, очевидно, $\varphi \in$ сюрєктивним відображенням.

У додатках часто використовується відображення $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^+$, при цьому $\varphi(x)$ виступає в ролі ціни або ваги, або довжини, або пропускнуї спроможності елемента $x \in X$.

Очевидно, завдання бієкції $\varphi: X \rightarrow Y$ рівнозначно встановленню взаємно однозначної відповідності між елементами множин X і Y .

Відображення $\varphi: X \rightarrow Y$ і $\psi: X \rightarrow Y$ називаються рівними, якщо з $x \in X$ $\varphi(x) = \psi(x)$ випливає $x = \psi^{-1}(\varphi(x))$ і навпаки, тобто якщо ці відображення можна зобразити двочастковим графом відображення.

Нехай X і Y - кінцеві непорожні множини, причому $|X| = m$, $|Y| = n$. Тоді кількість усіх відображень $\varphi: X \rightarrow Y$ дорівнює n^m . Дійсно, щоб одержати довільне відображення $\varphi: X \rightarrow Y$, треба побудувати двочастковий граф цього відображення, для чого вибрати для кожної вершини $x \in X$ одну і тільки одну дугу серед n дуг ($n = |Y|$), що можуть виходити з вершини x і заходити у вершини $y \in Y$, причому для різних вершин $x, x_1 \in X$ зазначений вибір дуг відбувається незалежно. Тому кількість усіх таких виборів, а виходить і всіх двочасткових графів відображень, буде $n \cdot n \cdot \dots \cdot n$, де кількість співмножників дорівнює $m = |X|$, так що утворюється шукана кількість n^m .

Множину усіх відображень $\varphi: X \rightarrow Y$ іноді позначають як Y^X , тому що для кінцевих X і Y тоді одержують формулу $|Y^X| = |Y|^{|X|}$. Але ніщо не заважає розглядати останню формулу для нескінченних X і Y і вважати цю формулу правилом зведення в кардинальний ступінь $|X|$ кардинального числа $|Y|$.

Наприклад, $c = 2^a$. Далі, суму $|X| + |Y|$ довільних кардинальних чисел визначають як потужність $|X + Y|$ множини $X + Y$, створеної з усіх вершин $x \in X$ та $y \in Y$ двочасткового графа довільного відображення $\varphi: X \rightarrow Y$, а добуток $|X| \cdot |Y|$ визначають як потужність $|X \times Y|$ множини $X \times Y$, створеної з всіляких упорядкованих пар (x, y) , де $x \in X$, $y \in Y$. Такі визначення суми і добутку кардинальних чисел узгоджуються зі звичним змістом $m + n$ і $m \cdot n$ для кінцевих множин X і Y при $m = |X|$, $n = |Y|$.

Перетворення. Відображення $\varphi: X \rightarrow X$ називають перетворенням множини X , на рисунку зображують у вигляді *орграфа* (орієнтованого графа) перетворення, вершинами якого є елементи $x \in X$, а дугами - пари (x_1, x_2) такі, що $x_1 \varphi x_2$, тобто $x_2 = \varphi(x_1)$. Перетворення $\varphi: X \rightarrow X$ можна зображати дворядковим записом, вміщуючи в першому рядку цього запису елементи

$x \in X$, а в другому - під ними їх представлення $\varphi(x)$. Наприклад, для $X = \{1, 2, \dots, 7\}$ одне з перетворень зобразимо дворядковим записом і орграфом (рис. 1.10):

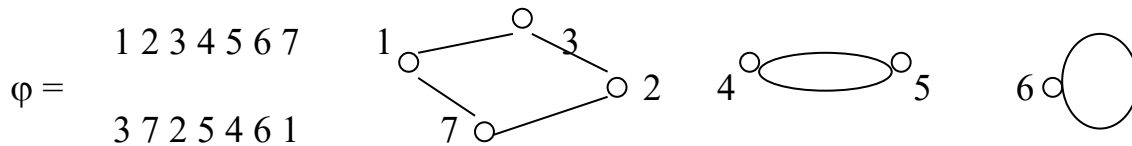


Рис.1.10. Приклад перетворення

Очевидно, що це перетворення бієктивне, причому $\varphi(A) = A$ для множин $A = \emptyset$, $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $A = \{4, 5\}$, $A = \{6\}$ і тільки для них.

Бієктивні перетворення називають підстановками. Як видно, оргграф підстановки φ кінцевої множини розпадається на частини, однозначно обумовлені підмножинами A , такими що $A = \varphi(A)$. Такі частини (вершини разом із дугами) прийнято називати циклами підстановки φ . Максимальна кількість циклів має тотожні підстановки φ , тобто такі, що $x = \varphi(x)$ виконується для довільного $x \in X$. Підстановки, що мають один цикл, називаються одноцикловими. Одноциклові підстановки служать, наприклад, моделями для опису обходу одною людиною n різноманітних пунктів (почавши рух у вихідному пункті, людина обходить всі інші по одному разу і повертається у вихідний пункт). Зауважимо, що кількість усіх підстановок n -елементної множини X дорівнює $n! = n * (n-1) * \dots * 2 * 1$, тому що елементу $x_1 \in X$ можна поставити у відповідність довільний із n елементів множини X , але елементу x_2 при $x_2 \neq x_1$ можна поставити у відповідність по підстановці φ будь-який елемент із тих $n-1$ елементів, що залишилися і що не є образом елемента x_1 тощо.

У зв'язку зі сказаним вище зручно позначити через $X!$ множину всіх бієктивних перетворень множини X , тому що тоді $|X!| = |X|!$ для кінцевих множин X .

Рекомендується пам'ятати, що $10! = 3628800$, а $0! = 1$ (за угодою).

Зрозуміло, що кількість всіх одноциклових підстановок n -елементної множини дорівнює $(n-1)!$.

Приклад. Кожне натуральне число можна розкласти на добуток простих чисел. Якщо розташувати прості дільники у певному порядку, наприклад не зменшення, то одержимо функцію

$$G(42) = (2, 3, 7); G(23) = 23;$$

$$G(100) = (2, 2, 5, 5) \text{ і т.д.}$$

Приклад. Кожній людині відповідає множина її знайомих.

$G(\text{Іванов}) = (\text{Сидоров, Миколаїв, ... , Семенов})$

Розділ 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

2.1. Основні положення

Теорію графів почали розробляти для розв'язання деяких задач про геометричні конфігурації, що складаються з точок і ліній.

Визначення графа можна дати як сукупності двох множин V (точок) і E (ліній, дуг), між елементами яких визначене відношення інцидентності, причому кожний елемент $e \in E$ інцидентний двом елементам $v', v'' \in V$. Елементи множини V називаються вершинами графа G , елементи множини E - його ребрами. Вершини і ребра графа G називають ще його елементами і замість $e \in E$ і $v \in V$ пишуть $e \in G$ і $v \in G$.

У деяких графах інцидентні ребру вершини нерівноправні, вони повинні, наприклад, розглядатися у визначеному порядку. Тоді кожному з ребер можна приписати напрямок від першої із інцидентних вершин до другої. Спрямоване ребро часто називають дугою, а граф, що їх містить, - орієнтованим. У протилежному випадку (інцидентні ребру вершини рівноправні) граф будемо називати неорієнтованим.

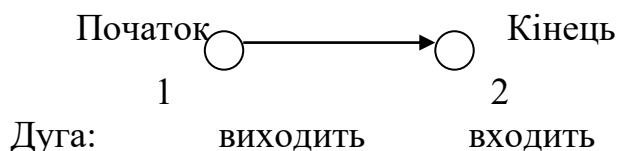


Рис.2.1. Зображення орієнтованого графа:
1-дуга виходить; 2-дуга входить.

Наочне уявлення про граф можна одержати, якщо уявити собі деяку множину точок площини X , що називаються вершинами, і множину спрямованих відрізків U , що з'єднують усі або деякі з вершин і називаються дугами. Математично граф G можна визначити як пару множин X і U : $G = (X, U)$. Граф називається повним, якщо дві різні його вершини з'єднані лише одним ребром.

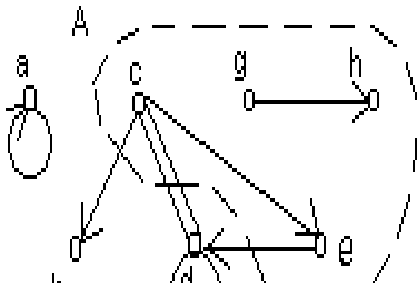


Рис.2.2. Зображення графа

На рис. 2.2 зображений граф, вершинами якого є точки a, b, c, d, e, g, h , а дугами - відрізки $(a, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (e, d), (g, h)$.

Прикладами графів є відношення батьківства і материнства на множині людей (дерево родоводу), карта доріг на місцевості, схема з'єднань електричних приладів, відношення переваги одних учасників турніру над іншими і т.п. Іноді буває зручно дати графу інше визначення. Можна вважати, що множина спрямованих дуг U , які з'єднують елементи

множини X , відображає цю множину саму в себе. Тому можна вважати граф заданим, якщо дана множина його вершин X і спосіб відображення Γ множини X в X . Таким чином, граф G є пара (X, Γ) , що складається з множини X і відображення Γ , заданого на цій множині $G=(X, \Gamma)$.

Так, для графа, зображеного на рис.2.2, відображення визначається в такий спосіб:

$$\Gamma a=a; \quad \Gamma b=\emptyset; \quad \Gamma c=\{b, d, e\}; \quad \Gamma d=\{c, d\}; \quad \Gamma e=d; \quad \Gamma g=h; \quad \Gamma h=\emptyset.$$

Неважко помітити, що дане визначення графа цілком збігається з визначенням відношення на множині.

Введемо деякі поняття і визначення, необхідні для опису різноманітних видів графів.

Підграфом G_A графа $G=(X, \Gamma)$ називається граф, в який входить лише частина вершин графа G , що утворює множину A , разом із дугами, що з'єднують ці вершини, наприклад обкреслена пунктиром область A на рис.2.2. Математично підграф позначається в такий спосіб:

$$G_A=(A, \Gamma_A), \text{ де } A \subseteq X, \Gamma_A=(\Gamma_X) \cap A.$$

Частковим графом G_Δ стосовно графа $G=(X, \Gamma)$ називається граф, що містить тільки частину дуг графа G , тобто визначений умовою:

$$G_\Delta=(X, \Delta), \text{ де } \Delta \subseteq \Gamma_X.$$

Наприклад, нехай $G=(X, \Gamma)$ - карта шосейних доріг України. Тоді карта шосейних доріг Дніпропетровської області являє собою підграф, а карта головних доріг України - це частковий граф.

Іншими важливими поняттями для графа є поняття шляху і контуру. Дуга, що з'єднує вершини a і b , спрямована від $\underline{a}$ до $\underline{b}$ і позначається $u=(a, b)$.

Визначення

Шляхом у графі G називають таку послідовність дуг $\mu=(u_1, \dots, u_k)$, в якій кінець кожної попередньої дуги збігається з початком наступної. Шлях μ , послідовними вершинами якого є вершини $a, b, \dots, m$, позначається через $\mu=(a, b, \dots, m)$.

Довжиною шляху $\mu=(u_1, \dots, u_k)$ називають число $l(\mu)=k$, що дорівнює числу дуг, які складають шлях. Іноді кожній дузі u_i приписують деяке число $l(u_i)$, яке

називається довжиною дуги. Тоді довжина шляху визначається як сума довжин дуг, що складають шлях

$$l(\mu) = \sum_{i=1}^k l(u_i).$$

Шлях, в якому ніяка дуга не зустрічається двічі, називається простим. Шлях, в якому ніяка вершина не зустрічається двічі, називається елементарним.

Контур - це кінцевий шлях $\mu = (x_1, \dots, x_k)$, де початкова вершина x_1 обов'язково збігається з кінцевою x_k . При цьому контур називається елементарним, якщо всі його вершини різноманітні (за винятком початкової і кінцевої, що збігаються). Контур одиничної довжини, утворений дугою вигляду (a, a) , називається петлею. Так, на рис.2.2 (e, d, c, b) - шлях, (c, e, d, c) - контур, (d, d) - петля. $l(e, d, c, b)$ - шлях, (c, e, d, c) - контур, (d, d) - петля.

Іноді графи зручно подавати у вигляді матриць, зокрема у вигляді матриць суміжності та інцидентності. Попередньо дамо два визначення.

Вершини x і $y \in$ суміжними, якщо вони різноманітні і якщо існує дуга, що йде з x до y .

Дугу u називають інцидентною вершині x , якщо вона заходить у цю вершину або виходить з неї.

Позначимо через $x_1, \dots, x_n$ вершини графа, а через $u_1, \dots, u_m$ - його дуги. Введемо числа:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u_i \text{ є дуга, що з'єднує вершину } i \text{ із вершиною } j; \\ 0, & \text{якщо такої дуги немає.} \end{cases}$$

Квадратна матриця $R = [r_{ij}]$ порядку $(n \times n)$ називається матрицею суміжності графа.

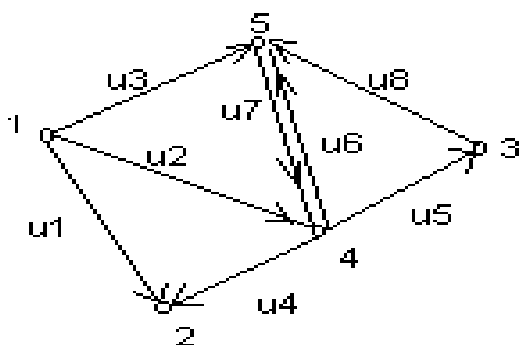
Введемо числа :

$$S_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } u_j \text{ виходить із } x_i; \\ -1, & \text{якщо } u_j \text{ заходить у } x_i; \\ 0, & \text{якщо } u_j \text{ не інцидентна } x_i. \end{cases}$$

Тоді матриця $S = [S_{ij}]$ порядку $(n \times m)$ називається матрицею інцидентності для дуг графа.

Матриці інцидентності в описаному вигляді застосовні тільки до графів без петель. У випадку наявності в графі петель цю матрицю варто розчленувати на дві підматриці: позитивну і негативну.

Приклад. На рис.2.3 наведений граф без петель, для якого матриці суміжності та інцидентності мають такий вигляд:



Матриця суміжності

I, J	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	1
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1
4	0	1	1	0	1

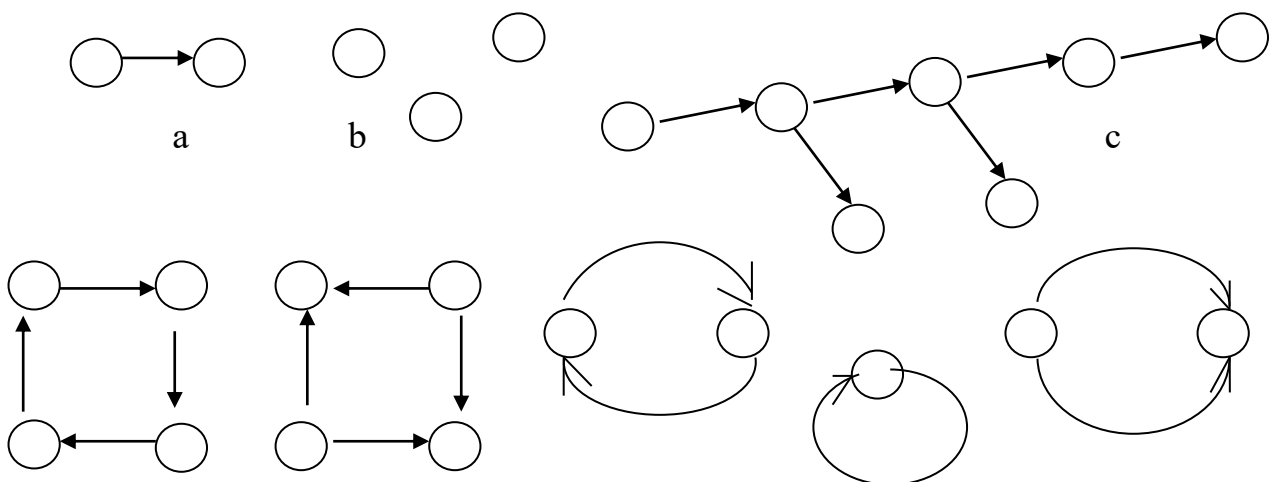
5	0	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---

Звичайно графи, які розглядаються, є кінцевими, тобто кінцеві множини їхніх елементів (вершин і ребер). Тому скінченність цих графів не буде додатково визначатися.

Приклади орієнтованих графів показані на рис.2.4.

Матриця інцидентності

i	1	2	3	4	5	6	7	8
j								
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	-1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	-1	0	0	1
4	0	-1	0	1	1	1	-1	0
5	0	0	-1	0	0	-1	1	-1



d

e

f

g

к

(кратне ребро)

Рис.2.4. Приклади орієнтованих графів

В наведених прикладах варіант "b" подає граф із порожньою множиною ребер. Граф "e" ілюструє недосяжність двох вершин, а "g" - граф із петлею.

2.2. Неорієнтовані графи

Іноді граф розглядають без урахування орієнтації дуг, тоді його називають неорієнтованим графом. Поняття "дуга", "шлях" і "контур" для неорієнтованого графа замінюються поняттями "ребро", "ланцюг", "цикл". Ребро - це відрізок, що з'єднує 2 вершини. Ланцюг - послідовність ребер. Цикл - ланцюг, у якого початкова і кінцева вершини збігаються. Описати неорієнтований граф можна шляхом завдання пари множин (X, U) , де X - множина вершин; U - множина ребер. Проте більш зручним є опис неорієнтованого графа за допомогою матриці суміжності або інцидентності, що будуються аналогічно відповідним матрицям для орієнтованих графів з тією різницею, що не робиться різниця між дугами, які входять у вершину і виходять з неї. При цьому вершини x і y називають суміжними, якщо існує ребро, що їх з'єднує, і це ребро називається інцидентним вершинам x і y .

Наведемо ще декілька визначень, які використовуються для характеристики неорієнтованих графів.

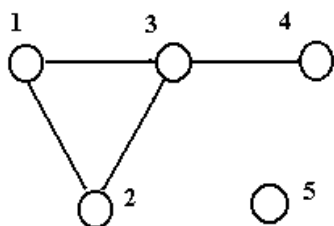


Рис.2.5. Неорієнтований граф

Ступенем вершини x , що позначається $\deg(x)$ або d_x , називають число ребер, інцидентних вершині x . Так, для графа на рис.2.5 маємо $d_1=2$, $d_2=2$, $d_3=3$, $d_4=1$, $d_5=0$. Якщо $d_x=1$, то вершину називають тупиковою; якщо $d_x=0$ то вершину називають ізолюваною.

Теорема. Нехай G - неорієнтований граф із n вершинами та m ребрами і d_j - ступінь j -й вершини. Тоді $\sum d_j = 2m$.

Доказ теореми випливає з того, що кожне ребро добавляє одиницю до ступеня кожної з 2-х вершин, що воно з'єднує, тобто добавляє 2 до суми ступенів уже наявних вершин.

Таким чином у кожному графі число вершин непарного ступеня парне.

Для неорієнтованого графа поняття "підграф" і "частковий граф" аналогічні відповідним поняттям для орієнтованого графа.

З поняттям неорієнтованого графа пов'язана важлива характеристика, що називається зв'язністю графа. Кажуть, що граф зв'язний, якщо будь-які дві його вершини можна з'єднати ланцюгом. Якщо граф G не зв'язковий, то його можна розбити на такі підграфи G_i , що усі вершини в кожному підграфі зв'язні, а вершини з різноманітних підграфів не зв'язні. Такі підграфи G_i називають компонентами зв'язності графа G . Якщо з графа (рис.2.5) виключити ізольовану вершину 5, то отриманий граф буде зв'язним. Граф на рис.2.6 не зв'язний і має дві компоненти зв'язності.

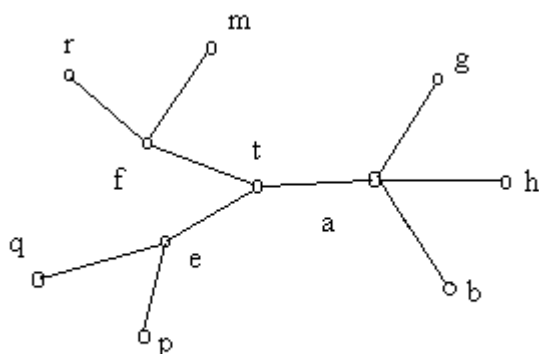
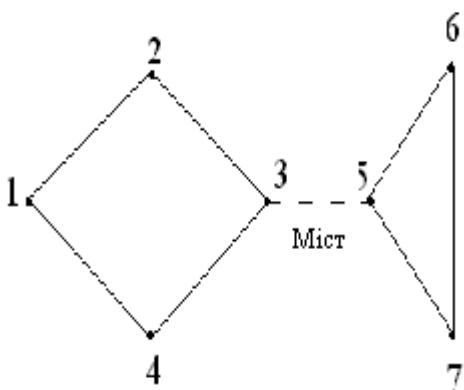
Його можна перетворити в зв'язний, додавши ребро (міст), що з'єднує вершини 3 і 5 (штрихова лінія). Видалення моста перетворює зв'язний граф у незв'язний.

Для того щоб визначити зв'язність орієнтованого графа, не потрібно звертати увагу на орієнтацію дуг. Граф, зображений на рис.2.6, є не зв'язним.

Проте його підграф, що складається з вершин 1, 2, 3, 4 є зв'язним. Для орієнтованого графа існує поняття сильної зв'язності. Граф сильно пов'язаний, якщо для будь-яких 2-х вершин x і y існує шлях, що йде з x в y . Важливий окремий випадок неорієнтованого графа - дерево (рис.2.7).

Деревом називають кінцевий зв'язковий неорієнтований граф, що не має циклів. Якщо дана множина вершин $a, b, c, \dots$, то дерево можна побудувати таким чином. Одну з вершин, наприклад a , приймемо за початкову і назвемо її коренем дерева.

З цієї вершини проводимо ребра в сусідні вершини $b, c, d, \dots$, із них проводимо ребра в сусідні з ними вершини $c, f, g, h, \dots$ і т.д. Отже, дерево можна побудувати послідовно, додаючи ребра в його вершинах. Це дає можливість установити зв'язок між числом вершин і числом ребер дерева. Найпростіше дерево складається з 2-х вершин, що з'єднані ребром. Щораз коли ми добавляємо ще одне ребро, наприкінці його додається і вершина. Отже, дерево з n вершинами має $n - 1$ ребер.



2.3. Ізоморфізм графів

Той самий граф геометрично можна зобразити різноманітними способами. Так, на рис.2.8 наведені три зображення того самого графа. Такі графи називаються ізоморфними.

Довільна підстановка φ на множині вершин графа G , що зберігає відношення суміжності, тобто така, що уяви $\varphi(u)$ і $\varphi(v)$ вершин u і v суміжні тоді і тільки тоді, коли суміжні самі вершини u і v , називається автоморфізмом графа G . Іншими словами, автоморфізм графа - це ізоморфізм графа на себе.

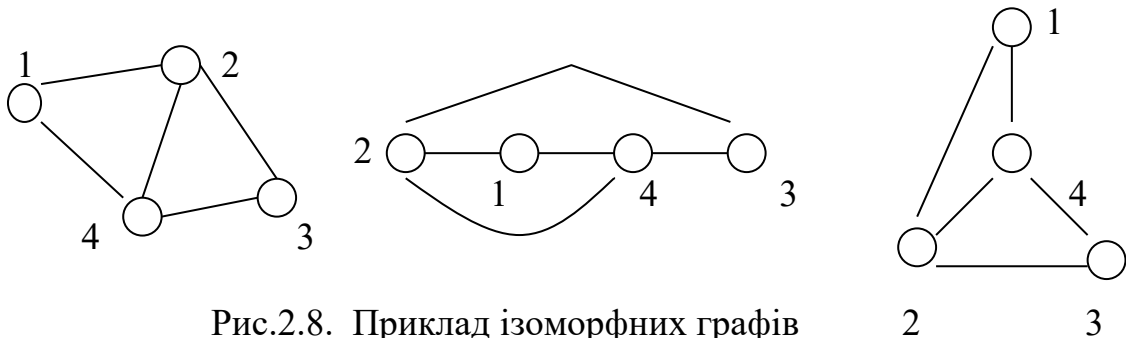


Рис.2.8. Приклад ізоморфних графів

Довільний граф G має щонайменше один автоморфізм - тотожне перетворення $e: VG \rightarrow VG$, при якому $e(v) = v$ для будь-якої вершини v . Очевидно, що якщо φ - автоморфізм графа G , то й обернена підстановка φ^{-1} також є автоморфізмом. Якщо підстановки φ і ψ обидві є автоморфізми, то і їхній добуток $\varphi\psi$ - автоморфізм.

2.4. Відношення порядку і відношення еквівалентності на графі

Із зазначених вище властивостей очевидно, що граф дає зручне геометричне уявлення відношень на множині, тому теорія графів і теорія відношень на множині взаємно доповнюють одна одну.

Будемо вважати, що на графі $G=(X, \Gamma)$ введене відношення порядку, якщо для будь-яких двох вершин (x, y) , що задовольняють умові $x \leq y$, існує шлях із x в y . У цьому випадку говорять, що вершина x передуює вершині y .

Покажемо, що дане визначення відбиває на графі усі властивості відношення порядку.

Рефлексивність. Умова $x \leq x$ означає еквівалентність вершини самої собі, тобто умова $x \equiv x$. Проте при бажанні цю умову можна розглядати як наявність шляху з x в x , тобто як петлю у вершині x (рис. 2.9, а).

Транзитивність. Умова $x \leq y, y \leq z \rightarrow x \leq z$ означає, що вершини x, y, z послідовно зустрічаються на тому самому шляху (рис. 2.9, б).

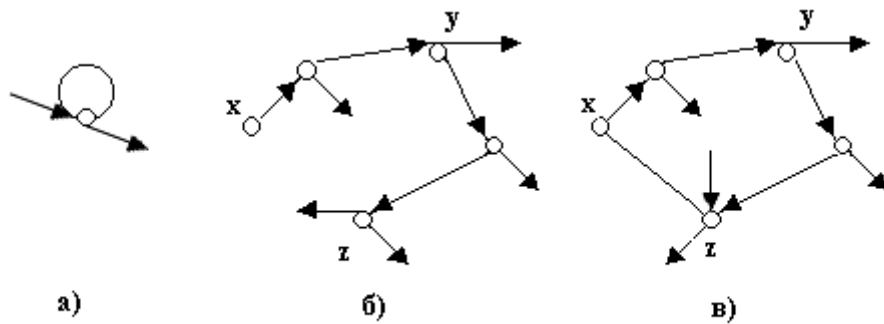


Рис.2.9. Властивості відношень на графах

Антисиметричність. Покажемо справедливість умови $x \leq y, y \leq x \rightarrow x \equiv y$. Ліва частина цього виразу говорить про те, що існує шлях із x в y , а так само існує шлях з y в x . Але це означає, що в графі є контур, на якому лежать вершини x і y (рис.2.9, в).

З правої частини умови випливає, що вершини, які лежать на тому самому контурі, є еквівалентними. Будемо розглядати цей висновок як визначення еквівалентності на графі і покажемо, що таке визначення задовольняє всім умовам відношення еквівалентності. Умови рефлексивності $x \equiv x$ і симетрії $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$ є очевидними і випливають із даного вище визначення еквівалентності. Умова транзитивності $x \equiv y, y \equiv z \rightarrow x \equiv z$ також є очевидним, тому що говорить про те, що якщо в графі є контур з вершинами x і y , а також контур з вершинами y і z , то є і контур, на якому лежать вершини x і z .

Таким чином, відношення порядку разом із відношенням еквівалентності визначає деякий граф.

На графі може бути також уведене відношення суворого порядку. У цьому випадку для будь-яких двох вершин (x і y), що задовольняють умові $x < y$, існує шлях, що йде з x у y . Умова транзитивності $x < y < z \rightarrow x < z$ означає, як і в попередньому випадку, що вершини x, y і z зустрічаються послідовно на тому самому шляху. Умова антирефлексивності ($x < x$ хибно) говорить про відсутність петель на графі, а умова несиметричності ($x < y, y < x$) - про відсутність контурів.

Таким чином, відношення суворого порядку визначає граф без контурів.

Зводимо всі дані по відношенню порядку в табл. 2.1.

Таблиця 2.1.

Визначення різноманітних видів порядку

Порядки	Відношення					
	Антисиметричне	Транзитивне	Рефлексивне	Антирефлексивне	Повне	Неповне

Строгий	+	+		+		
Нестрогий	+	+	+			
Повний	+	+			+	
Неповний	+	+				+

2.5. Характеристики графів

Вирішення багатьох технічних завдань методами теорії графів зводиться до визначення тих або інших характеристик графів, хоча технічні додатки теорії графів розглядати в цьому посібнику неможливо, знайомство з найважливішими характеристиками графів може виявитися корисним при вивченні інших дисциплін.

Цикломатичне число. Нехай G - неорієнтований граф, що має n вершин, m ребер і r компонент зв'язності. Цикломатичним числом графа G називають число $((G))=m-n+r$.

Це число має цікавий фізичний зміст. Воно дорівнює найбільшому числу незалежних циклів у графі. При розрахунку електричних ланцюгів цикломатичним числом можна користуватися для визначення числа незалежних контурів.

Хроматичне число. Нехай r - натуральне число. Граф G називають r -хроматичним, якщо його вершини можна пофарбувати r різноманітними кольорами так, щоб ніякі дві суміжні вершини не були пофарбовані однаково. Найменше число r , при якому граф є r -хроматичним, називають хроматичним числом графа і позначають $\Psi(G)$.

Якщо $\Psi(G)=2$, то граф називають біхроматичним. Необхідною і достатньою умовою того, щоб граф був біхроматичним, є відсутність у ньому циклів непарної довжини. Хроматичне число графа має важливу роль при вирішенні завдань найбільш економного використання пам'яті при програмуванні. Проте його визначення, за винятком випадку біхроматичного графа, являє собою досить важке завдання, що потребує нерідко застосування електронних обчислювальних машин.

Нехай G - зв'язаний неорієнтований граф, V і U - будь-які дві його вершини. Тоді існує їхній простий ланцюг $M(L_1, L_2, \dots, L_q)$, що їх зв'язує.. Якщо кількість ребер q цього ланцюга не мінімальне з можливих, то існує ланцюг $M(L_1, L_2, \dots, L_q)$, що зв'язує V і U і має менше число ребер. Таким чином, існує ланцюг M , що зв'язує V і U з мінімальною кількістю ребер p . Мінімальна довжина простого ланцюга з початком V і кінцем U називається відстань $d(V, U)$ між цими вершинами.

Відстань $d(U', U'')$ задовольняє аксіомам метрики:

- 1) $d(U', U'') > 0$ при ланцюзі $d(U', U'') = 0$, якщо $U' = U''$;

2) $d(U', U'') = d(U', U'')$;

3) справедлива нерівність трикутника $d(U', U'') + d(U'', U''') > d(U', U''')$.

Діаметр графа

Діаметр графа визначається таким чином:

$$d(G) = \max d(U', U''), U', U'' \in G.$$

Нехай V - довільна вершина графа G . Максимальним віддаленням у графі G від вершини U називається величина $p(U) = \max d(U, U'), U' \in G$.

Вершина U називається центром графа, якщо максимальне віддалення від неї набуває мінімальне значення

$$P(G) = \min p(U'), U' \in G.$$

Максимальне віддалення $p(G)$ від центру називається радіусом графа.

Центр не обов'язково повинний бути єдиним.

Наприклад, у повному неорієнтованому графі, в якому будь-які дві різноманітні вершини U', U'' , або V з'єднані ребром, радіус дорівнює 1 і будь-яка вершина U і V є центром.

У зв'язному графі всі вершини пов'язані між собою.

Множина внутрішньої усталеності. Множину $S \subseteq X$ графа $G=(X, \Gamma)$ називають внутрішньо стійкою, якщо ніякі дві вершини з S не суміжні, тобто для будь-якого $X \in S$ має місце $\Gamma_X \cap S = \emptyset$.

Множину внутрішньої усталеності, що містить найбільше число елементів, називають найбільшою внутрішньо стійкою множиною, а число елементів цієї множини - числом внутрішньої усталеності графа G . Найбільша внутрішньо стійка множина відіграє важливу роль у теорії зв'язку.

Множина зовнішньої усталеності. Множину $T \subset X$ графа $G=(X, \Gamma)$ називають зовнішньо стійкою, якщо будь-яка вершина, що не належить T , сполучена дугами з вершинами з множини T , тобто для довільного $x \notin T$ має місце $\Gamma_x \cap T \neq \emptyset$.

Множину зовнішньої усталеності, що містить найменше число елементів, називають найменшою зовнішньо стійкою множиною, а число елементів цієї множини - числом зовнішньої усталеності графа G .

2.6. Ейлерові графи і гамільтонові цикли

Розрізняють ейлерові цикли і ейлерові графи. Ейлеровий цикл можна вважати слідом ручки, що викреслює цей цикл, не відриваючись від паперу.

Умови, при яких граф є ейлеровим. Кінцевий неорієнтований граф G ейлеровий тоді і тільки тоді, коли він зв'язаний і ступені всіх його вершин парні.

У незв'язному графі кожний цикл належить якийсь його зв'язаній частині, тобто не проходить через усі його ребра.

У кожену вершину може входити декілька дуг за умови, що виходять вони щораз по інших дугах. Таким чином, їх повинно бути парне число.

Ейлерові ланцюги. Так називається ланцюг, що включає всі ребра даного кінцевого неорієнтованого графа G , але має різні початок (U') і кінець (U'').

Щоб у графі існував ейлеровий ланцюг, необхідна його зв'язність і парність ступенів усіх вершин, крім початкової і кінцевої. Останні дві вершини повинні мати непарні ступені: із U' ми зайвий раз виходимо, а в U'' зайвий раз входимо. Ці умови достатні для існування ейлерового ланцюга.

Розглянемо випадок кінцевого орієнтованого графа.

Щоб у скінченному орієнтованому графі існував ейлеровий цикл, необхідно і достатньо рівність ступенів вершин графа по входних і вихідних ребрах.

Оскільки будь-якому неорієнтованому графу канонічно відповідає орієнтований, в якому кожне ребро замінюється двома спрямованими дугами, інцидентними тим же вершинам і такими, що йдуть у протилежному напрямку, то звідси випливає справедливості твердження.

У кінцевому зв'язковому графі завжди можна побудувати орієнтований цикл, що проходить через кожне ребро по одному разу в кожному з двох напрямків. Такий цикл іноді називається способом обходу всіх дуг графа. Він використовується в багатьох прикладних задачах, пов'язаних із графами.

Гамільтоновим циклом називається простий цикл, який проходить через усі вершини графа, що аналізуються. Такий цикл існує не у всякому графі (рис. 2.10).

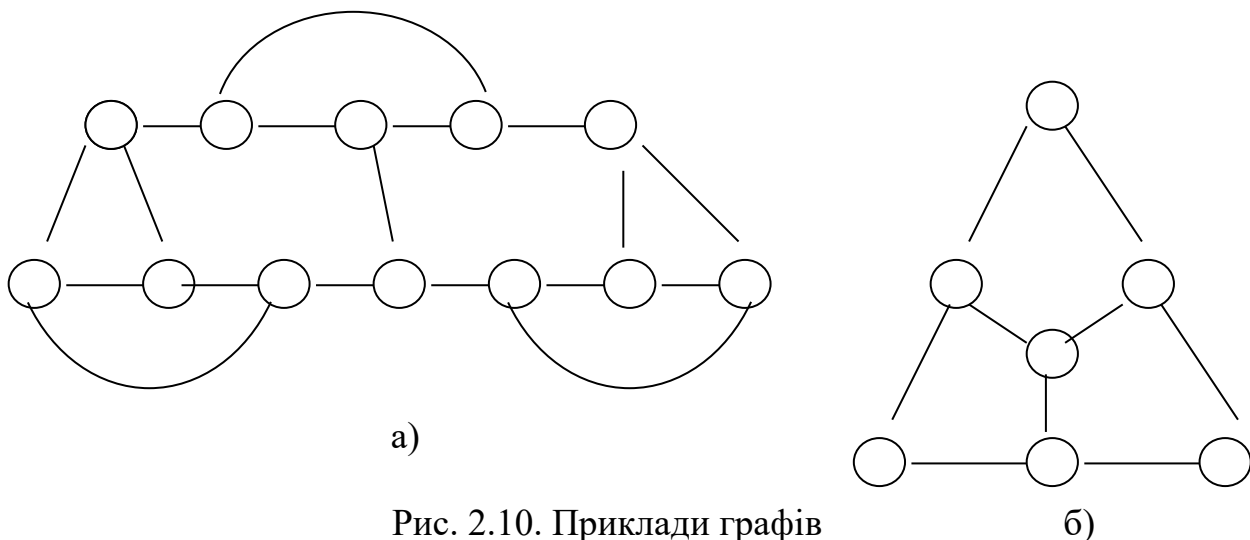


Рис. 2.10. Приклади графів

а - гамільтоновий цикл існує; б - гамільтоновий цикл не існує.

Незважаючи на зовнішню подібність, задачі розпізнавання ейлеровості і гамільтоновості графа принципово різноманітні. Правило визначення ейлеровості наведено вище. Що ж стосується гамільтоновості графа, то відповідь на це питання дає така теорема, що наводиться без доказу: граф із

ступеневою послідовністю $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ є гамільтоновим, якщо для всякого k , що задовольняє нерівностям $1 \leq k < n/2$, істинна імплікація (відповідність):

$$(d_k \leq k) \Rightarrow (d_{n-k} \geq n - k).$$

Існують і інші, як більш сильні, так і більш слабкі теореми й умови визначення гамільтоновості графів.

2.7. Розрахунок мережного графіка

Граф, деякі вершини якого виділені, називається мережею. Виділені вершини називаються полюсами мережі. Наприклад, дерево з коренем можна розглядати як однополюсну мережу. Ізоморфізмом мереж називається ізоморфне відображення їхніх графів, при якому полюси обов'язково переходять у полюси.

Вершини, відмінні від полюсів, називаються внутрішніми вершинами мережі. Ребро, інцидентне хоча б одному полюсу, називається полюсним ребром. Інші ребра називаються внутрішніми.

Роздивимося використання положень теорії графів при побудові мережі складного комплексу робіт або операцій.

Всякий намічений комплекс робіт, необхідних для досягнення деякої мети, називають проектом. Так, можна говорити про будівництво нового будинку, модернізацію устаткування, створення нового пристрою. При цьому терміни виконання всього проекту задані і відома тривалість окремих робіт або операцій, що входять до складу проекту. Кожна така операція починається і закінчується будь-якою подією. Звичайно вихідна подія - це початок операції (роботи), а кінцева за відношенням до даної операції - є закінчення цієї операції, і можливо, початок нової.

Розглянемо основні розрахункові параметри мережного графіка і формули для їхнього розрахунку. Позначимо: t_p - ранній термін настання події; t_n - пізній термін настання події; t_{ij} - час операцій; i - номер попередньої події; j - номер наступної події; R_p - повний резерв часу операції (i, j) ; R - резерв часу події; t_{po} - ранній термін закінчення операції (i, j) ; t_{no} - пізній термін закінчення операції (i, j) .

Основні тимчасові параметри мережного графіка з детермінованим часом виконання операцій розраховуються за такими формулами:

1) ранній термін настання події j

$$t_p^j = \begin{cases} t_p^i + t_{ij}, & \text{якщо до події } j \text{ підходить одна операція;} \\ \max_{\{i\}} \{t_p^i + t_{ij}\}, & \text{якщо до події } j \text{ підходить декілька операцій;} \end{cases}$$

2) пізній термін настання події j

$$t_n^j = \begin{cases} t_n^i - t_{ij}, & \text{якщо від події } j \text{ відходить одна} \end{cases}$$

$$t_{ij}^i = \begin{cases} \text{операція;} \\ \min \{t_{ij}^j - t_{ij}^i\}, \text{ якщо від події } j \text{ відходить} \\ \{j\} \text{ декілька операцій;} \end{cases}$$

3) резерв часу події

$$R = t_n - t_p;$$

4) ранній термін закінчення операції (i, j)

$$t_{po} = t_p + t_{ij}, \text{ при } t_{po} = 0;$$

5) пізній термін закінчення операції (i, j)

$$t_{no} = t_n;$$

6) повний резерв часу операції (i, j)

$$R_n = t_n - t_p - t_{ij},$$

де R_n - максимальний час, на який можна відкласти або збільшити тривалість роботи (i, j), не змінюючи директивного або раннього терміна настання завершальної події; R_n набуває мінімальних значень для операцій, що лежать на критичному шляху; ці мінімальні значення дорівнюють нулю, якщо директивний термін настання завершальної події не заданий або перевищує початок виконання операцій на час, рівний тривалості критичного шляху.

Критичний шлях мережного графіка $L_{кр}$ - це послідовність операцій, тривалість яких складає максимальний час виконання всього комплексу операцій. Тривалість критичного шляху називають критичним часом і позначають, як $T_{кр}$. Критичний шлях $L_{кр}$ визначається як послідовність операцій із найменшим повним резервом часу.

Розрахунок t_{po} і t_p ведеться від початку мережного графіка до кінця, а розрахунок t_n і t_{no} - від кінця до початку. При цьому для кінцевої події $t_p = t_n$.

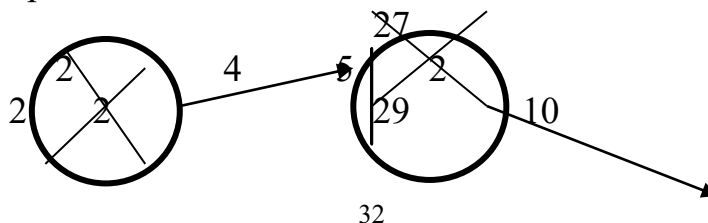
При розрахунку часових параметрів мережних графіків із детермінованим часом виконання операцій не враховуються випадкові зміни тривалості операцій, що може істотно впливати на термін завершення всього комплексу операцій.

Приклад. У таблиці записані роботи (i, j) і час їхнього виконання t_{ij} .

i, j	1, 2	1, 3	2, 3	2, 5	3, 4	3, 6	4, 5	4, 6	4, 7	5, 7	6, 7
t_{ij}	2	8	5	4	7	23	12	4	5	10	8

Представимо мережний графік (рис. 2.11) і визначимо його параметри за подіями і роботами.

Розв'язання. За даними роботами i, j будуємо мережний графік. Подій усього 7, значить рисуємо 7 вершин. Треба так розташувати вершини, щоб роботи i, j не перетиналися.



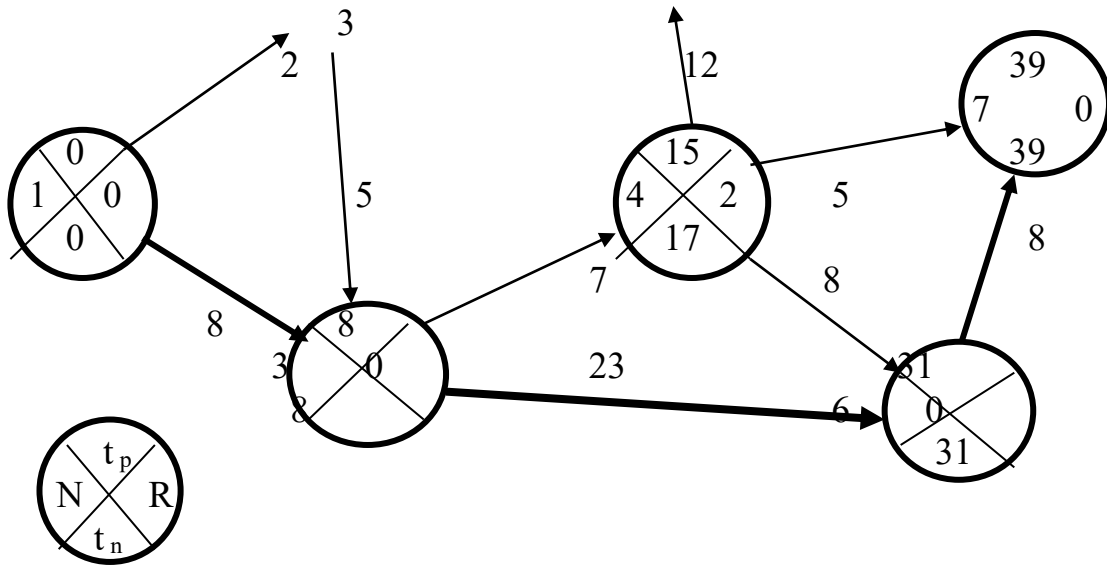


Рис. 2.11. Мережний графік

Знаходимо параметри за подіями.

1. Ранній термін настання події i , $t_p(i)$. Це максимальний шлях від початкової події до i -ї події:

$$t_p(1) = 0; \quad t_p(2) = t_{1,2} = 2.$$

У третю подію входять 2 роботи: (2, 3) і (1, 3), значить

$$t_p(3) = \max\{t_p(2) + t_{2,3}; t_p(1) + t_{1,3}\} = \max\{2+5, 8\} = 8.$$

У четверту подію входить одна робота (3, 4)

$$t_p(4) = t_p(3) + t_{3,4} = 8 + 7 = 15.$$

У п'яту подію входять 2 роботи: (2, 5) і (4, 5), значить

$$t_p(5) = \max\{t_p(2) + t_{2,5}; t_p(4) + t_{4,5}\} = \max\{2+4, 15+12\} = 27.$$

У шосту подію входять дві роботи: (4, 6) і (3, 6), значить

$$t_p(6) = \max\{t_p(4) + t_{4,6}; t_p(3) + t_{3,6}\} = \max\{15+4, 8+23\} = 31.$$

У сьому подію входять три роботи: (5, 7); (4, 7); (6, 8) значить

$$t_p(7) = \max\{t_p(5) + t_{5,7}; t_p(4) + t_{4,7}; t_p(6) + t_{6,7}\} = \max\{27+5, 15+10, 31+8\} = 39.$$

2. Пізній термін настання події i , $t_n(i)$ - це різниця між тривалістю максимального шляху $l_{\max}$ і шляху найбільшої тривалості від даної події i до кінцевої.

Розраховується $t_n(i)$ за оберненою схемою $t_p(i)$. Значить, розрахунок починаємо від кінцевої події, орієнтуємося на вихідні роботи, беремо мінімум різниці.

Для кінцевої події

$$t_n(7) = t_p(7) = 39.$$

З шостої події виходить одна робота (6, 7)

$$t_n(6) = t_n(7) - t_{6,7} = 39 - 8 = 31.$$

З п'ятої події виходить одна робота (5, 7)

$$t_n(5) = t_n(7) - t_{5,7} = 39 - 10 = 29.$$

З четвертої події виходить 3 роботи (4, 5), (4, 6), (4, 7)

$$t_n(4) = \min\{t_n(5) - t_{4,5}; t_n(6) - t_{4,6}; t_n(7) - t_{4,7}\} = \min\{29 - 12; 31 - 4; 39 - 5\} = 17.$$

З третьої події виходить 2 роботи: (3, 4), (3, 6)

$$t_n(3) = \min\{t_n(4) - t_{3,4}; t_n(6) - t_{3,6}\} = \min\{17 - 7; 31 - 23\} = 8.$$

З другої події виходить 2 роботи: (2, 5); (2, 3)

$$t_n(2) = \min\{t_n(5) - t_{2,5}; t_n(3) - t_{2,3}\} = \min\{8 - 5; 29 - 4\} = 3.$$

З початкової події виходить 2 роботи: (1, 2); (1, 3)

$$t_n(1) = \min\{t_n(2) - t_{1,2}; t_n(3) - t_{1,3}\} = \min\{3 - 2; 8 - 8\} = 0.$$

Для початкової події повинна виконуватися умова:

$$t_p(1) = t_n(1) = 0.$$

3. Знаходимо резерв часу за подіями:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i);$$

$$R(1) = 0; R(2) = 3 - 2 = 1; R(3) = 8 - 8 = 0;$$

$$R(4) = 17 - 15 = 2; R(5) = 29 - 27 = 2; R(6) = 31 - 31 = 0;$$

$$R(7) = 39 - 39 = 0.$$

4. Критичний шлях проходить за подіями з нульовим резервом часу $R(i) = 0$, тобто 1, 3, 6, 7 (виділено на графі). Довжина критичного шляху $L_{кр}$ - це самий довгий шлях від початкової події до кінцевої:

$$L_{кр} = t_p(7) = 39.$$

Розрахуємо необхідні параметри за роботами.

5. Ранній термін закінчення роботи (i, j) :

$$t_{p.o}(i, j) = t_p(i) + t_{i,j};$$

$$t_{p.o}(1,2) = t_p(1) + t_{1,2} = 0 + 2 = 2;$$

$$t_{p.o}(1,3) = t_p(1) + t_{1,3} = 0 + 8 = 8;$$

$$t_{p.o}(2,3) = t_p(2) + t_{2,3} = 2 + 5 = 7;$$

$$t_{p.o}(2,5) = t_p(2) + t_{2,5} = 2 + 4 = 6;$$

$$t_{p.o}(3,4) = t_p(3) + t_{3,4} = 8 + 7 = 15;$$

$$t_{p.o}(3,6) = t_p(3) + t_{3,6} = 8 + 23 = 31;$$

$$t_{p.o}(4,5) = t_p(4) + t_{4,5} = 15 + 12 = 27;$$

$$t_{p.o}(4,6) = t_p(4) + t_{4,6} = 15 + 4 = 19;$$

$$t_{p.o}(4,7) = t_p(4) + t_{4,7} = 15 + 5 = 20;$$

$$t_{p.o}(5,7) = t_p(5) + t_{5,7} = 27 + 10 = 37;$$

$$t_{p.o}(6,7) = t_p(6) + t_{6,7} = 31 + 8 = 39.$$

6. Пізній термін настання закінчення роботи (i, j) :

$$t_{n.o}(1,2) = t_n(2) = 3; \quad t_{n.o}(2,3) = t_n(3) = 8;$$

$$t_{n.o}(1,3) = t_n(3) = 8; \quad t_{n.o}(2,5) = t_n(5) = 29;$$

$$t_{n.o}(3,4) = t_n(4) = 17; \quad t_{n.o}(4,5) = t_n(5) = 29;$$

$$t_{n.o}(3,6) = t_n(6) = 31; \quad t_{n.o}(4,6) = t_n(6) = 31;$$

$$t_{n.o}(5,7) = t_n(7) = 39; \quad t_{n.o}(4,7) = t_n(7) = 39;$$

$$t_{n.o}(6,7) = t_n(7) = 39.$$

7. Повний резерв часу роботи i, j - це час, на який можна збільшити тривалість даної роботи, не змінюючи при цьому тривалість критичного шляху $L_{кр}$

$$\begin{aligned}
 R_n(i, j) &= t_n(j) - t_p(i) - t_{ij}; \\
 R_n(1,2) &= t_n(2) - t_p(1) - t_{1,2} = 3-0-2 = 1; \\
 R_n(1,3) &= t_n(3) - t_p(1) - t_{1,3} = 8-0-8 = 0; \\
 R_n(2,3) &= t_n(3) - t_p(2) - t_{2,3} = 8-2-5 = 1; \\
 R_n(2,5) &= t_n(5) - t_p(2) - t_{2,5} = 8-2-4 = 2; \\
 R_n(3,4) &= t_n(4) - t_p(3) - t_{3,4} = 17-8-7 = 2; \\
 R_n(3,6) &= t_n(6) - t_p(3) - t_{3,6} = 31-8-23 = 0; \\
 R_n(4,5) &= t_n(5) - t_p(4) - t_{4,5} = 29-15-12 = 2; \\
 R_n(4,6) &= t_n(6) - t_p(4) - t_{4,6} = 31-15-4 = 12; \\
 R_n(5,7) &= t_n(7) - t_p(5) - t_{5,7} = 39-27-10 = 2; \\
 R_n(6,7) &= t_n(7) - t_p(6) - t_{6,7} = 39-31-8 = 0.
 \end{aligned}$$

Робота (4, 7) має великий резерв часу (12), значить можна з цієї роботи зняти на даному етапі ресурси і перекинути їх на роботи, що лежать на критичному шляху. Аналогічно, роботи (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 7) мають резерв часу рівний 2. Роботу (2, 3) вважаємо під критичною, а роботи з нульовим резервом часу - критичні. На рис. 2.11 критичний шлях відзначений жирною лінією.

2.8. Оптимізація на мережах

Нехай S є довільна, частково орієнтована мережа, кожному ребру u якої приписане невід'ємне число $c(u)$ - пропускна спроможність. Потоком у мережі S називається пара (f, w) , де w - деяка орієнтація всіх неорієнтованих ребер мережі, а $f(u)$ - задана на множині всіх ребер функція з невід'ємними значеннями, що не перевершують пропускних спроможностей, і така, що в кожній внутрішній вершині α виконується закон Кірхгофа, відповідно до якого сума значень потоку по ребрах, що входить у вершину, дорівнює сумі потоків по ребрах, що виходить із вершини. Іншими словами, для $f(u)$ виконуються умови:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq f(u) \leq c(u) \text{ для усіх вершин мережі;} \\
 R(\alpha) &= 0 \text{ для усіх внутрішніх вершин, де}
 \end{aligned}$$

$$R(\alpha) = \sum_{uu \in \Gamma(\alpha)} f(u) - \sum_{u \in \Gamma'(\alpha)} f(u),$$

а $\Gamma(\alpha)$ (відповідно $\Gamma'(\alpha)$) - множина всіх ребер, що виходять із α (відповідно вхідних у α) при орієнтації w .

Оскільки сума значень $R(\alpha)$ по усіх вершинах мережі, включаючи полюси, дорівнює нулю (кожне ребро є вихідним для однієї вершини і вхідним

для іншої), то $R(\alpha_s) = -R(\beta_s)$. Значення $R = R(\alpha_s)$ називається величиною потоку.

Розглянемо задачу визначення максимального значення $R_{\max}$ потоку через мережу S при заданих значеннях пропускних спроможностей. Відповідь може бути отримана у термінах перетинів мережі.

Перетином мережі називається множина ребер, при видаленні яких мережа стає незв'язною, причому полюса потрапляють у різні компоненти зв'язності. У мережі на рис. 2.11 прикладами перетинів є $\{d, e, f\}$, $\{b, c, e, g, h\}$, $\{d, g, h, i\}$.

Перетин називається простим, якщо при видаленні будь-якого його ребра, він перестав бути перетином. Так, перетини $\{d, e, f\}$ і $\{b, c, e, g, h\}$ - прості, а перетин $\{d, g, h, i\}$ не є таким. Очевидно, що для кожного ребра простого перетину можна зазначити ланцюг, що проходить через це ребро, але не проходить через інші ребра даного перетину.

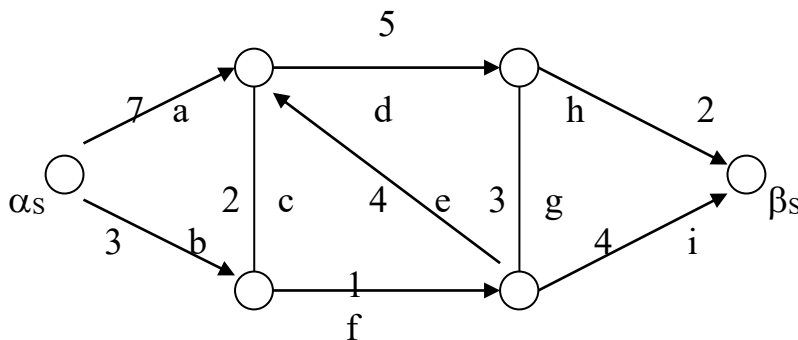


Рис.2.12. Задача максимального потоку

Якщо у зв'язній мережі віддалиться простий перетин, то мережа розпадеться рівно на дві частини: ліву і праву, що містить α_s і β_s відповідно. Кожне ребро простого перетину зв'язує вершини з різних частин. Будемо називати ребро перетину прямим, якщо воно в мережі не орієнтоване або орієнтоване зліва праворуч, і оберненим у протилежному випадку. Буде орієнтоване ребро прямим або оберненим, залежить від вибору перетину. Так, у прикладі ребро e в перетинах $\{d, e, f\}$ і $\{b, c, e, g, h\}$ - обернене, а в перетині $\{a, c, e, g, i\}$ - пряме.

Кожному простому перетину W припишемо пропускну спроможність $c(W)$, рівну сумі пропускних спроможностей усіх його прямих ребер. У

прикладі на рис.2.12 перетин $\{d, e, f\}$ має пропускну спроможність $5+1=6$, а перетин $\{b, c, e, g, h\}$ - $3+2+3+2=10$.

Теорема про максимальну пропускну спроможність мережі сформульована Фордом і Фалкерсоном так: максимальний розмір потоку $R_{\max}$ через мережу S дорівнює мінімальній пропускній спроможності $c_{\min}$ її простих перетинів. Ця теорема покладена в основу задачі визначення максимальної пропускної спроможності мережі.

Розглянемо алгоритм Форда - Фалкерсона для розв'язання цієї задачі.

Крок 0. Нехай джерела позначені, але не переглянуті, а всі інші вузли не позначені.

Крок 1. Вибрати довільний позначений, але не переглянутий вузол i .

Крок 2. Переглянути всі дуги $e(i, j)$ із пропускну спроможністю $\alpha_e > 0$, що з'єднують вузол i з ще не позначеними вузлами j . Приписати позначки вузлам j і відзначити дуги $e_j = e = (i, j)$. Тепер вузол i позначений та переглянутий, вузли j позначені, але не переглянуті. Якщо при цьому стік виявився позначеним, то необхідний ланцюг знайдений. У протилежному випадку після перегляду по всіх дугах (i, j) перейти до кроку 3.

Крок 3. Нехай вузол i позначений і переглянутий. Перейти до кроку 1 і повторювати кроки алгоритму доти, поки не залишиться позначених і не переглянутих вузлів. На цьому пошук максимального потоку закінчується.

Розглянемо приклад. Нехай необхідно знайти максимальний потік для графа (рис.2.13).

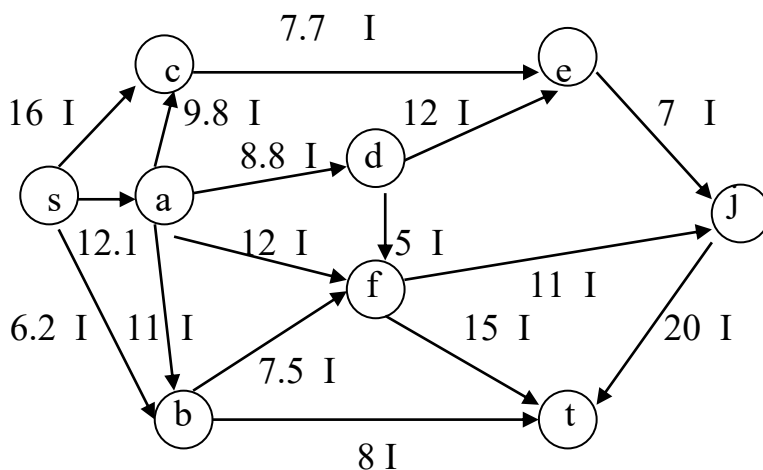


Рис. 2.13. Заданий граф

Позначено: I - ресурси не використані; R - ресурси використані цілком; IR - ресурси використані частково.

1. Вибираємо один із довільних маршрутів (рис.2.14). Нехай це буде маршрут $(s, b), (b, t)$.

$$p1 = \min \{f(s, b), f(b, t)\} = \min \{6.2; 8\} = 6.2.$$

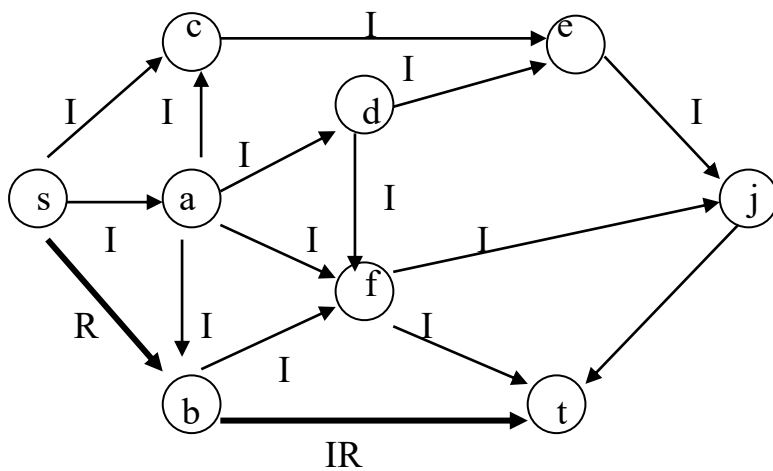


Рис.2.14. Перший маршрут

2. Маршрут (s, a), (a, f), (f, t) наведений на рис.2.15.
 $p_2 = \min \{f(s, a), f(a, f), f(f, t)\} = \min \{12.1; 12; 15\} = 12; P_\Sigma = 18.2.$

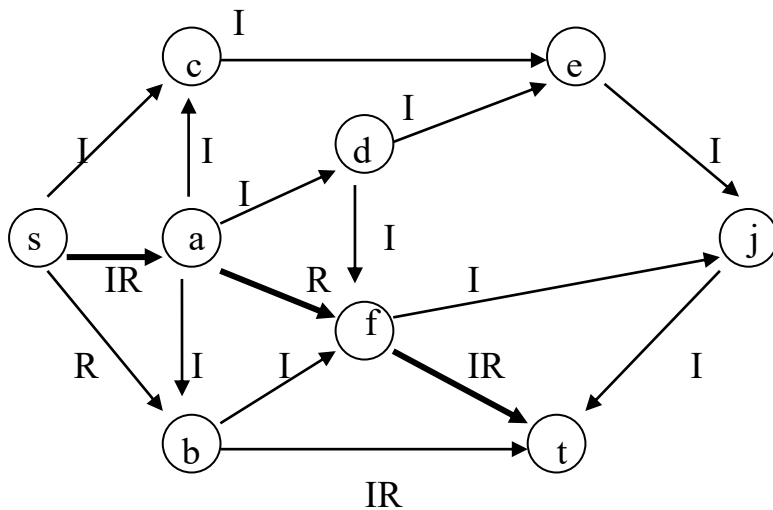
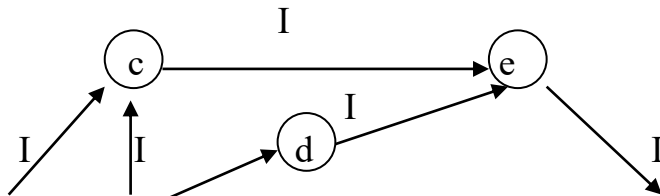


Рис.2.15. Другий маршрут

3. Маршрут (s, a), (a, b), (b, f), (f, t) наведений на рис.2.16.
 $p_3 = \min \{f(s, a), f(a, b), f(b, f), f(f, t)\} = \min \{0.1; 11; 7.5; 3\} = 0.1; P_\Sigma = 18,3.$



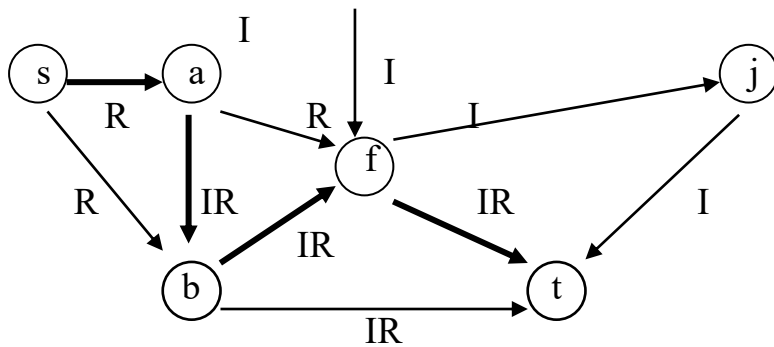


Рис.2.16. Третій маршрут

4. Наступний маршрут (s, c), (c, e), (e, j), (j, t) наведений на рис.2.17.
 $p_4 = \min \{f(s, c), f(c, e), f(e, j), f(j, t)\} = \min \{16; 7.7; 7; 20\} = 7; \quad P_{\Sigma} = 25.3.$

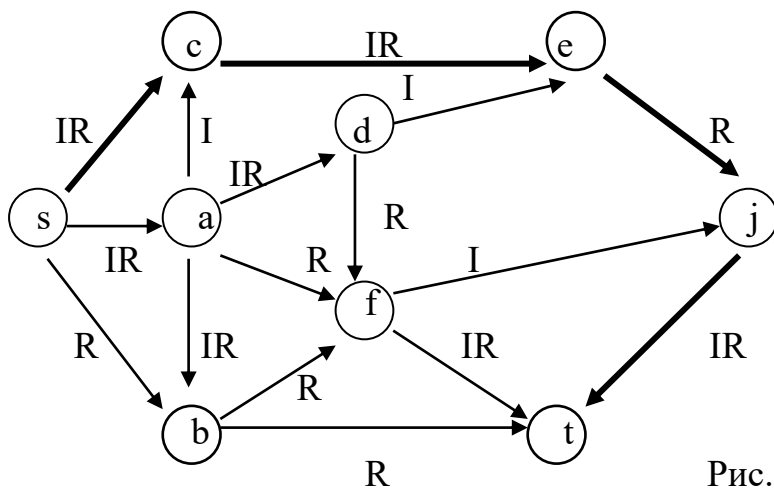


Рис.2.17. Четвертий маршрут

Таким чином, максимальний потік буде 25.3 одиниць.

Якщо для мережі кожне ребро характеризується деяким числом, що є відстанню між вузлами мережі, то виникає задача визначення найкоротшої відстані між заданими вузлами, тобто початку і сток.

Розглянемо алгоритм Дейкстри для визначення найкоротшого шляху (ланцюга) з початку в стік.

Крок 0. Вибрати як перспективну множину вузлів множину $S_c = S_0$ і покласти $d_i = 0$ для $i \in S_0$ та $d_i = \infty$ для $i \notin S_0$.

Крок 1. Вибрати вузол $i^* \in S_c$, якому відповідає найменше значення d_i ($i \in S_0$). Знайдений в такий спосіб розмір d_{i^*} відповідає найкоротшому шляху з деякого джерела у вузол i^* (довжиною дуги є c_e), а дуга e_i (визначена для усіх вузлів $i \in S_c$, крім джерел) є остання дуга шляху. Якщо i^* - стік, то процедура пошуку найкоротшого шляху закінчується.

Крок 2. Переглянути дуги $e = (i^*, j)$ і замінити оцінку d_j на $\min \{d_j, d_{i^*} + c_e\}$. Якщо d_j була дорівнена ∞ , увести вузол j у S_c . Якщо d_j зменшилася, увести позначення $e_j = e = (i^*, j)$.

Крок 3. Видалити i^* із S_c і перейти до кроку 1, якщо множина S_c не порожня. На цьому пошук найкоротшого шляху закінчується.

Приклад. Для мережі, показаної на рис.2.18, визначити найкоротший шлях із початку в стік.

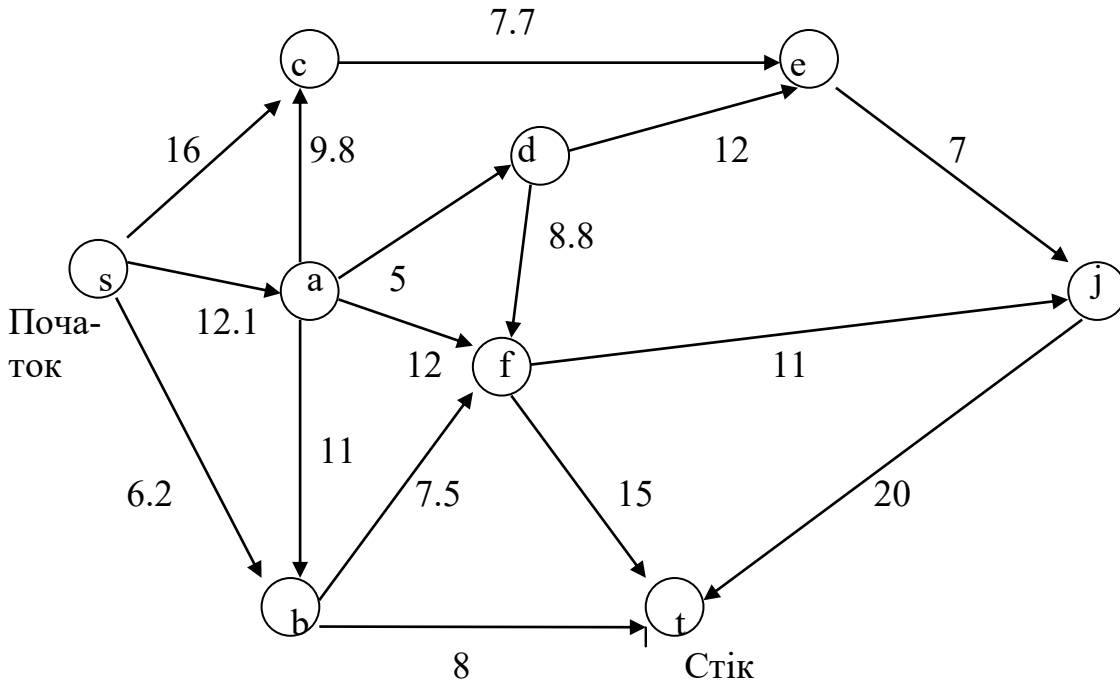


Рис. 2.18. Мережа для визначення найкоротшого шляху

1. Фарбуємо вершину s . Приймемо $d(s) = 0$;

$$d(a) = d(b) = d(c) = d(e) = d(f) = d(j) = \infty.$$

2. Поточна змінна $u = s$.

$$d(a) = \min \{d(a), d(s) + d(s, a)\} = \min \{(\infty; 0 + 12.1\} = 12.1;$$

$$d(b) = \min \{d(b), d(s) + d(s, b)\} = \min \{(\infty; 0 + 6.2\} = 6.2;$$

$$d(c) = \min \{d(c), d(s) + d(s, c)\} = \min \{(\infty; 0 + 16\} = 16;$$

$$d(d) = \min \{d(d), d(s) + d(s, d)\} = \min \{(\infty; 0 + (\infty)\} = \infty;$$

$$d(e) = \min \{d(e), d(s) + d(s, e)\} = \min \{(\infty; 0 + (\infty)\} = \infty;$$

$$d(f) = \min \{d(f), d(s) + d(s, f)\} = \min \{(\infty; 0 + (\infty)\} = \infty;$$

$$d(j) = \min \{d(j), d(s) + d(s, j)\} = \min \{(\infty; 0 + (\infty)\} = \infty;$$

$$d(t) = \min \{d(t), d(s) + d(s, t)\} = \min \{(\infty; 0 + (\infty)\} = \infty;$$

$$\min \{d(a), d(b), d(c), d(d), d(e), d(f), d(j), d(t)\} =$$

$$= \min \{12.1; 6.2; 16; \infty; \infty; \infty; \infty; \infty\} = 6.2; d(b) = 6.2. \text{ Фарбуємо}$$

вершину b .

3. Поточна змінна $u = b$.

$$d(a) = \min \{d(a), d(b) + d(b, a)\} = \min \{12.1; 6.2 + \infty\} = 12.1;$$

$$d(c) = \min \{d(c), d(b) + d(b, c)\} = \min \{16; 6.2 + \infty\} = 16;$$

$$d(d) = \min \{d(d), d(b) + d(b, d)\} = \min \{\infty; 6.2 + \infty\} = \infty;$$

$$d(e) = \min \{d(e), d(b) + d(b, e)\} = \min \{\infty; 6.2 + \infty\} = \infty;$$

$$d(f) = \min \{d(f), d(b) + d(b, f)\} = \min \{\infty; 6.2 + 7.5\} = 13.7;$$

$$d(j) = \min \{d(j), d(b) + d(b, j)\} = \min \{\infty; 6.2 + \infty\} = \infty;$$

$$d(t) = \min \{d(t), d(b) + d(b, t)\} = \min \{\infty; 6.2 + 8\} = 14.2;$$

$$\min \{d(a), d(c), d(d), d(e), d(f), d(j), d(t)\} = \\ = \min \{12.1; 16; \infty; \infty; 13.7; \infty; \infty\} = 12.1; d(a) = 12.1. \text{ Фарбуємо вершину } a.$$

4. Поточна змінна $y = a$.

$$d(c) = \min \{d(c), d(a) + d(a, c)\} = \min \{16; 12.1 + 9.8\} = 16;$$

$$d(d) = \min \{d(d), d(a) + d(a, d)\} = \min \{\infty; 12.1 + 8.8\} = 20.9;$$

$$d(e) = \min \{d(e), d(a) + d(a, e)\} = \min \{\infty; 12.1 + \infty\} = \infty;$$

$$d(f) = \min \{d(f), d(a) + d(a, f)\} = \min \{13.7; 12.1 + 12\} = 13.7;$$

$$d(j) = \min \{d(j), d(a) + d(a, j)\} = \min \{\infty; 12.1 + \infty\} = \infty;$$

$$d(t) = \min \{d(t), d(b) + d(b, t)\} = \min \{\infty; 12.1 + \infty, 6.2 + 8\} = 14.2;$$

$$\min \{d(c), d(d), d(e), d(f), d(j), d(t)\} =$$

$$= \min \{16; 20.9; \infty; 13.7; \infty; \infty\} = 13.7; d(f) = 13.7.$$

Фарбуємо вершину f .

5. Поточна змінна $y = f$.

$$d(c) = \min \{d(c), d(f) + d(f, c)\} = \min \{16; 13.7 + \infty\} = 16;$$

$$d(d) = \min \{d(d), d(f) + d(f, d)\} = \min \{20.9; 13.7 + \infty\} = 20.9;$$

$$d(e) = \min \{d(e), d(f) + d(f, e)\} = \min \{\infty; 13.7 + \infty\} = \infty;$$

$$d(j) = \min \{d(j), d(f) + d(f, j)\} = \min \{\infty; 13.7 + 11\} = 24.7;$$

$$d(t) = \min \{d(t), d(f) + d(f, t), d(b) + d(b, t)\} = \min \{\infty; 13.7 + 15, 6.2 + 8\} = 14.2;$$

$$\min \{d(c), d(d), d(e), d(j), d(t)\} = \min \{16; 20.9; \infty; 24.7; 14.2\} = 14.2;$$

$$d(t) = 14.2. \text{ Фарбуємо вершину } t.$$

Висновок. Найкоротший шлях з початку s у стік t тільки один, складається з дуг (s, b) і (b, t) та дорівнює 14.2 одиниць.

Розділ 3. ВАРІАНТИ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ

Задача 1

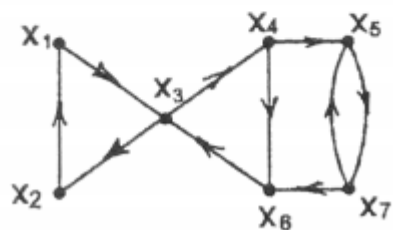
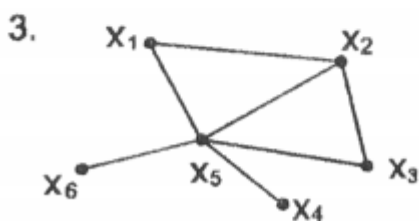
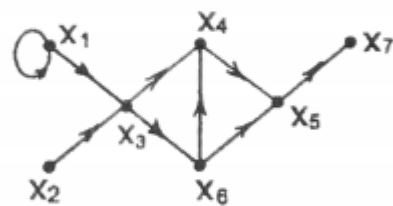
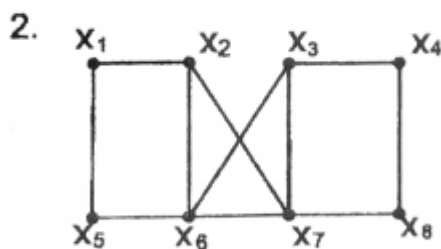
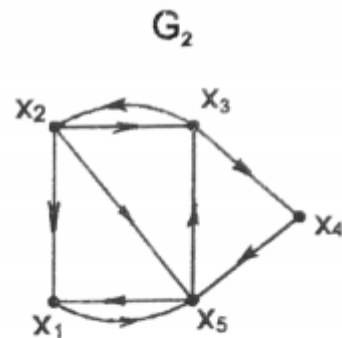
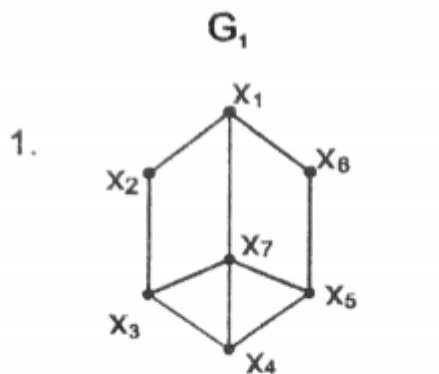
Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

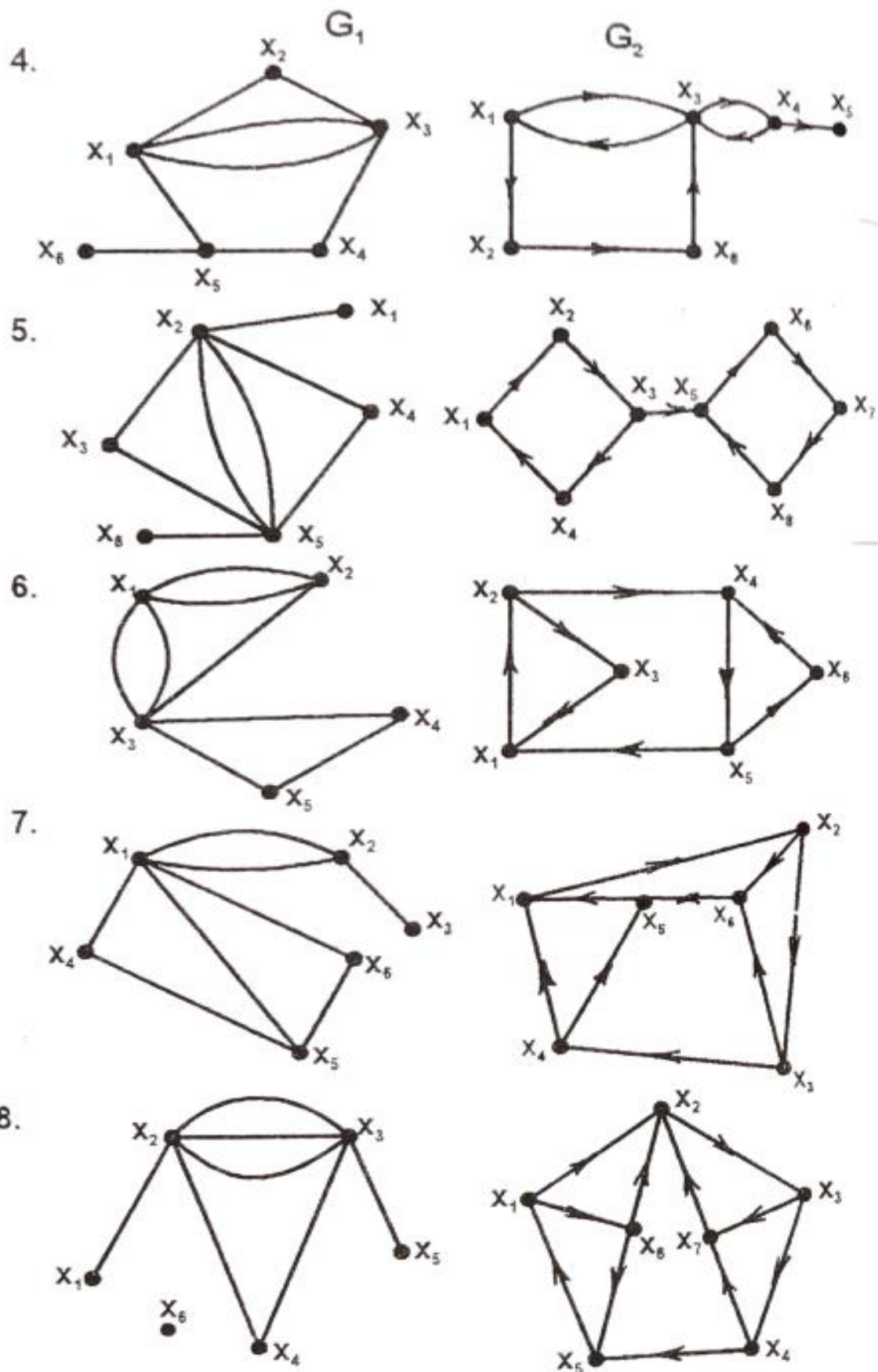
№	<i>A</i>	<i>B</i>
01	{1, 3, 5}	{2, 4};
02	{1, 2, 4}	{3, 1, 5, 0}
03	{2, 5, 4}	{3, 1, 5}
04	[-1, 3]	] 2, 6 [
05	(0, 1)	{0, ½, 1}
06	(3, 5)	(2, 4)
07	{1, 2, 3, 4}	{2, 4, 6, 8}
08	(0, 9)	[-5, 5]
09	{1, 3, {2, 4}, 0}	{{1, 3}, 2, 4}
10	{1, {2, 5}, 6}	{1, 2, 5, 6}
11	$\{x \in A / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 4 \text{ і } x \leq 40\}$	$\{x \in B / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 5 \text{ і } x \leq 40\}$
12	$\{x \in A / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 4 \text{ і } x \leq 30\}$	$\{x \in B / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 6 \text{ і } x \leq 40\}$
13	$\{x \in A / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 2 \text{ і } x \leq 20\}$	$\{x \in B / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 3 \text{ і } x \leq 30\}$
14	$\{x \in A / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 9 \text{ і } x \leq 100\}$	$\{x \in B / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 10 \text{ і } x \leq 100\}$
15	(3, 5)	[2, 4]
16	$\{(x, y) \in R, x^2 + y^2 \leq 4\}$	$\{(x, y) \in R, x \in]1, 2], y \in [-2, +\infty)\}$
17	$\{(x, y) \in R, x^2 + y^2 \leq 4\}$	$\{(x, y) \in R, x \in [1, 3[, y \in [-1, 1]\}$
18	{a, b, c, e, d}	{a, e, l, k, n}
19	{{a, b}, {c, d}}	{a, b, c, d}
20	[2, 5]	{0, 1, 2, 3, 4, 5}
21	(3, 5)	(2, 4)
22	$\{x \in A / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 3 \text{ і } x \leq 30\}$	$\{x \in B / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 5 \text{ і } x \leq 50\}$
23	$\{x \in R, x \leq 1\}$	$\{x \in R, x > 0\}$
24	{1, 5, 3, 0, 7}	{2, 4, 0, 6}
25	$\{x \in R, x \leq 2\}$	$\{x \in R, x \leq 0\}$
26	(2, 6]	[4, 9)
27	{a, c, b}	{c, d, k}
28	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	$\{x \in B / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 2 \text{ і } x \leq 10\}$
29	{2, 3, 7, 8, 9, 11, 19, 20}	$\{x \in B / x \in N \text{ і } \text{поділяється на } 2 \text{ або } 3 \text{ і } x \leq 100\}$
30	{2, 5, 4}	{2, 5, 4}

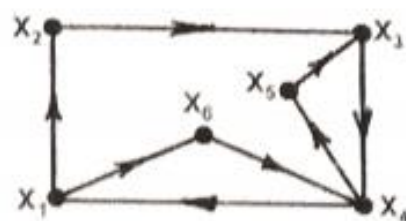
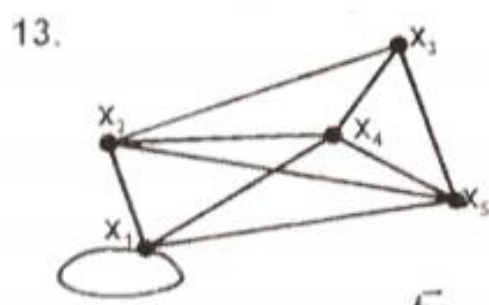
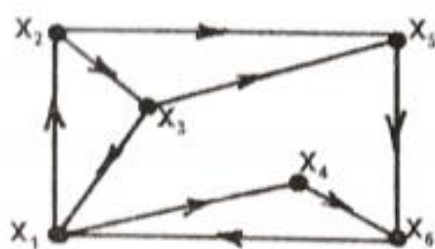
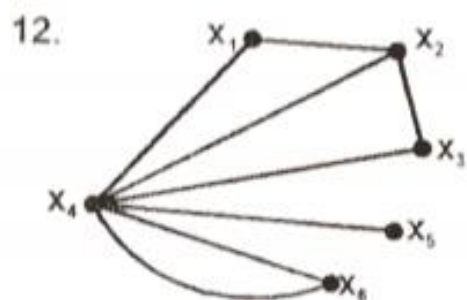
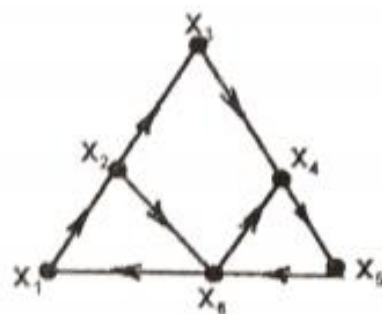
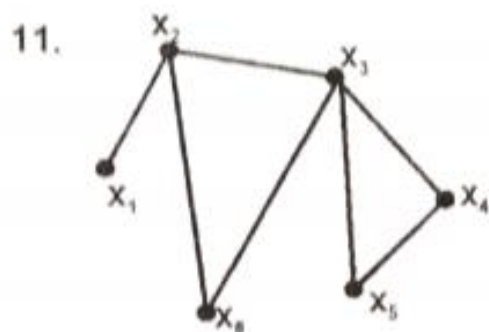
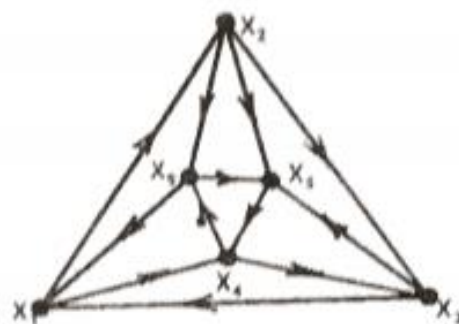
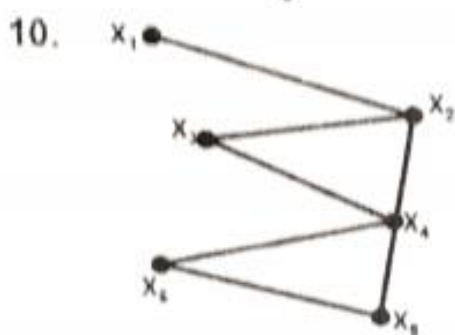
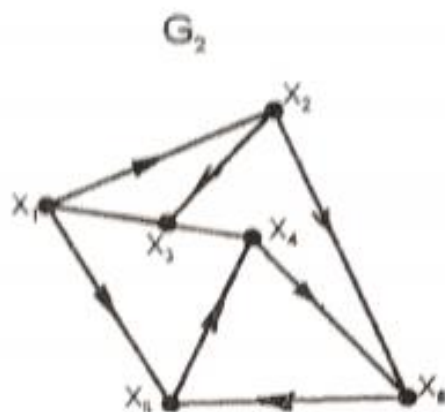
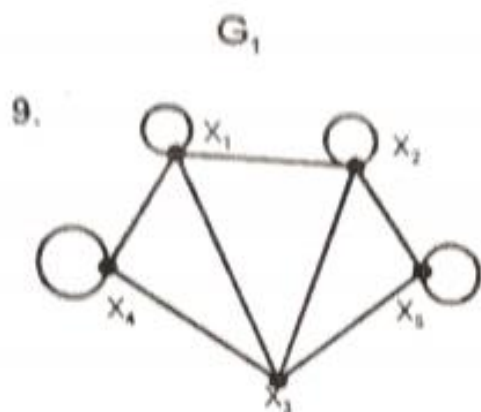
Задача 2

1. Знайти степені кожної вершини графів G_1 та G_2 (для орграфа вказати також $\deg x_1$ та $\deg x_1$). Перевірити формулу підрахування кількості ребер, використовуючи степені вершин графа.
2. Записати матриці суміжності та матриці інциденцій графів G_1 та G_2 .
3. Визначити $\Gamma(x_1)$, $\Gamma(x_2)$, $\Gamma^{-1}(x_1)$, $\Gamma^{-1}(x_2)$ у кожному графі.

4. У неорієнтованому графі G_1 вказати можливі маршрути між будь-якими вершинами, які були б звичайним ланцюгом, звичайним циклом, елементарним циклом.
5. В орграфі G_2 вказати можливі маршрути між двома будь-якими вершинами, які були б звичайним шляхом, звичайним контуром.
6. Побудувати будь-який граф, ізоморфний графові G_1 .
7. Побудувати такий підграф графа G_1 (графа G_2), який містив би у собі тільки вершини графа G_1 (графа G_2) з парними індексами.
8. Знайти кількість шляхів довжини 4 у графі G_2 .

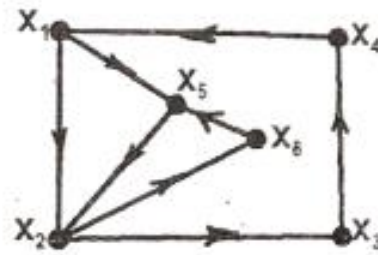
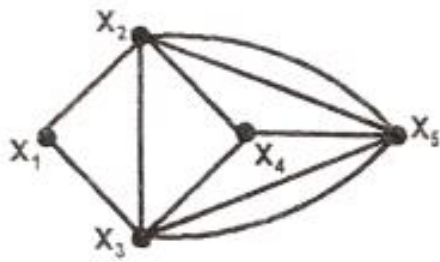




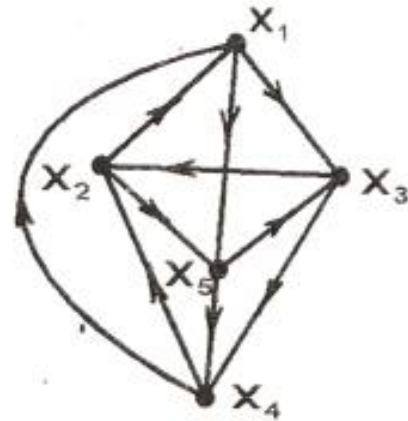
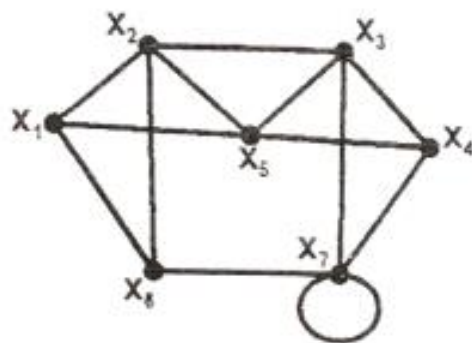


G_1 G_2

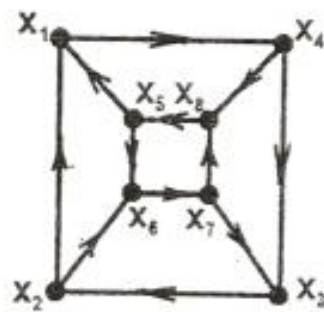
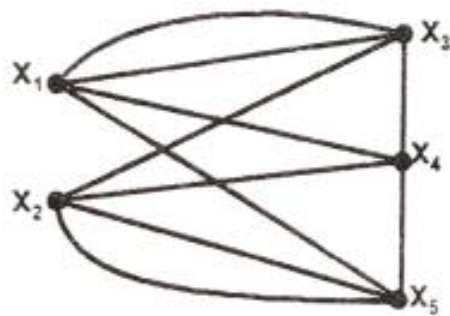
14.



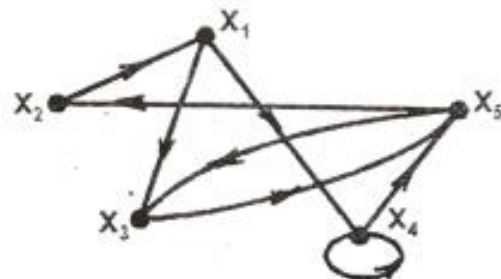
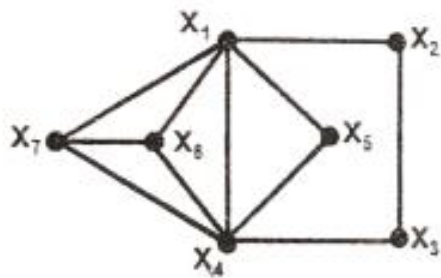
15.



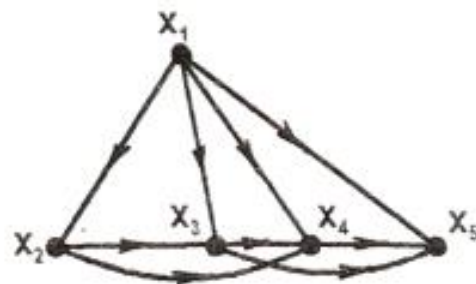
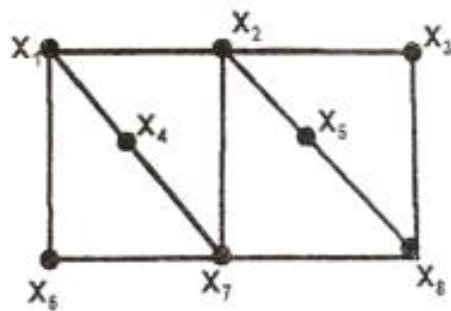
16.



17.

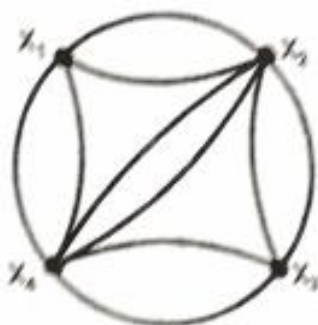


18.

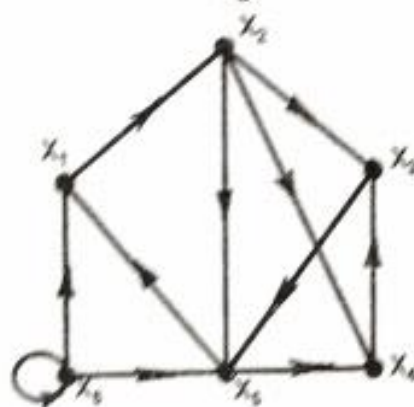


G_1

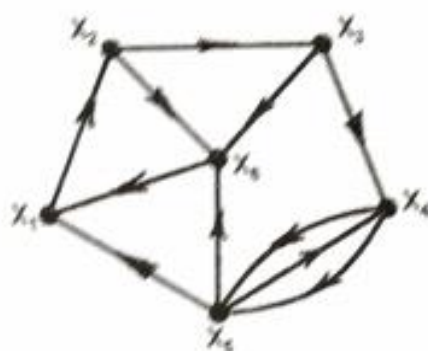
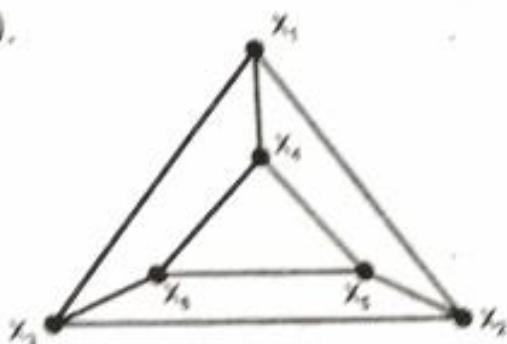
19.



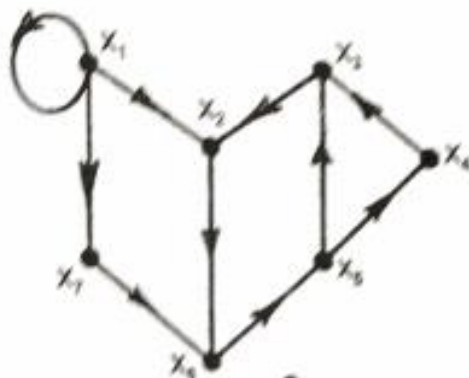
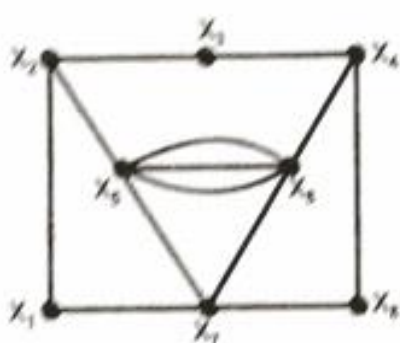
G_2



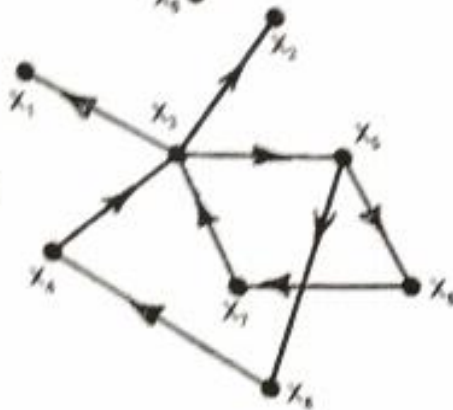
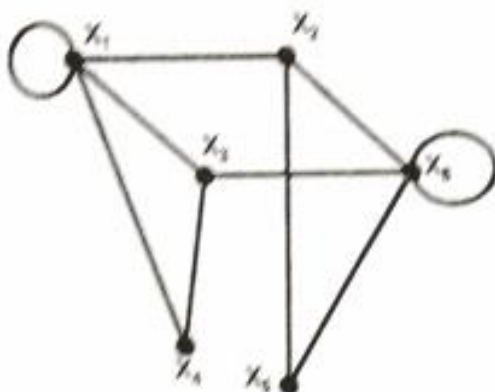
20.

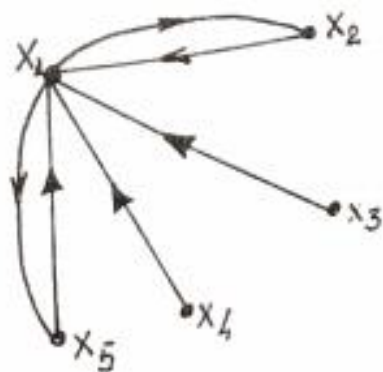
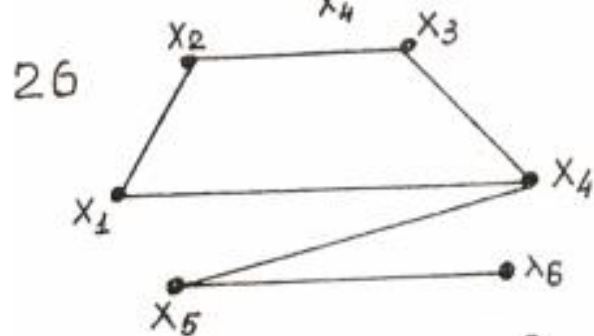
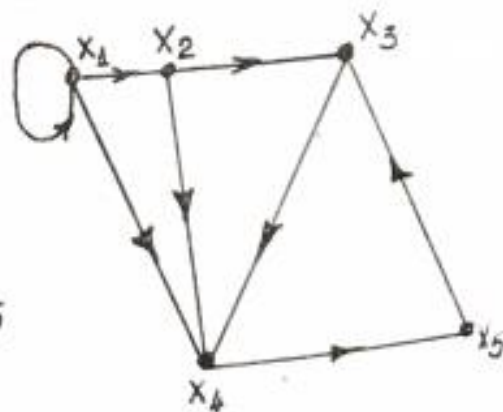
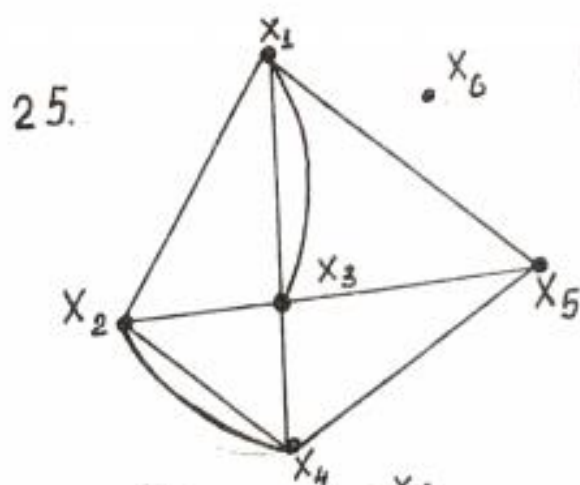
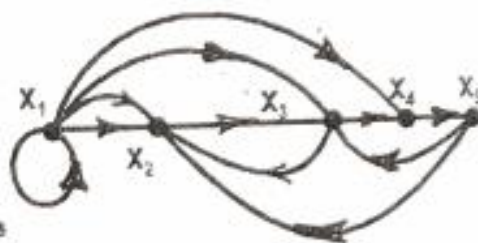
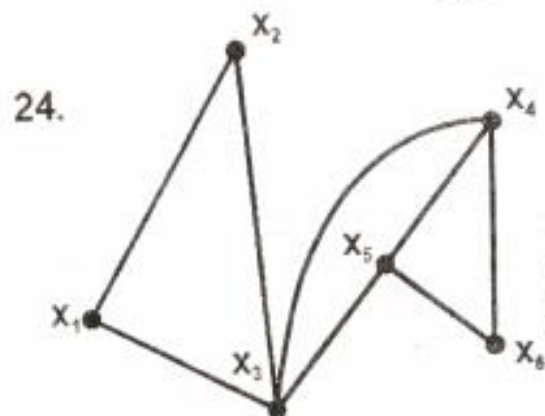
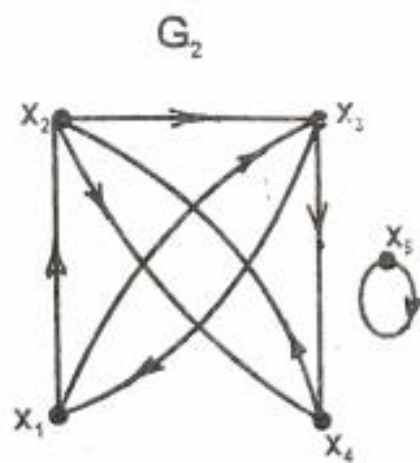
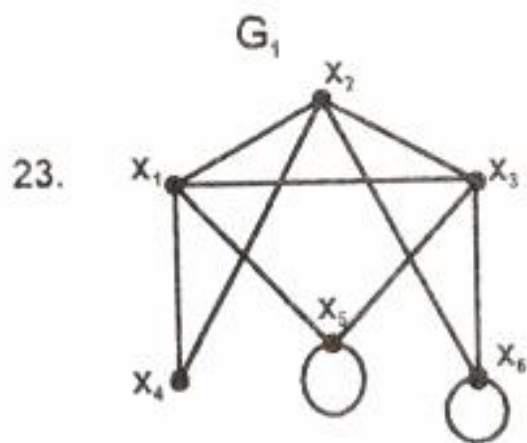


21.



22.





Задача 3

За даними матрицями суміжності A або інциденцій B відновити початковий граф.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$12. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$13. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$21. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$22. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$23. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$24. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$25. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

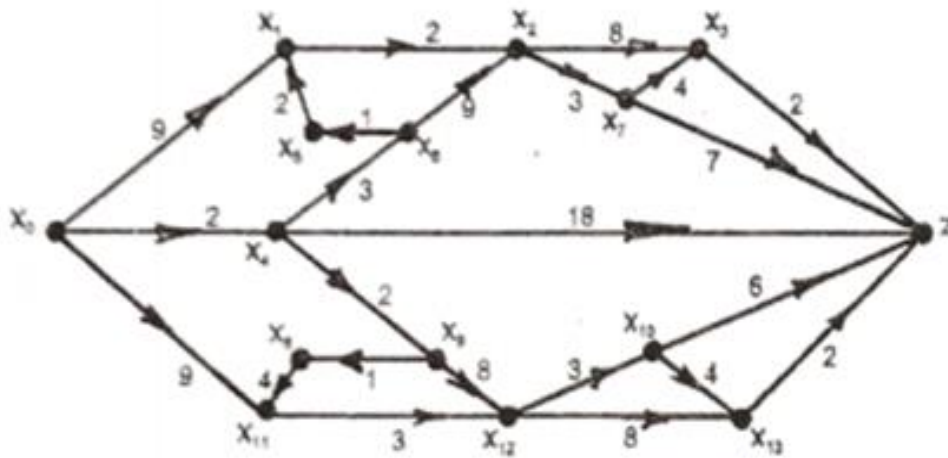
$$26. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

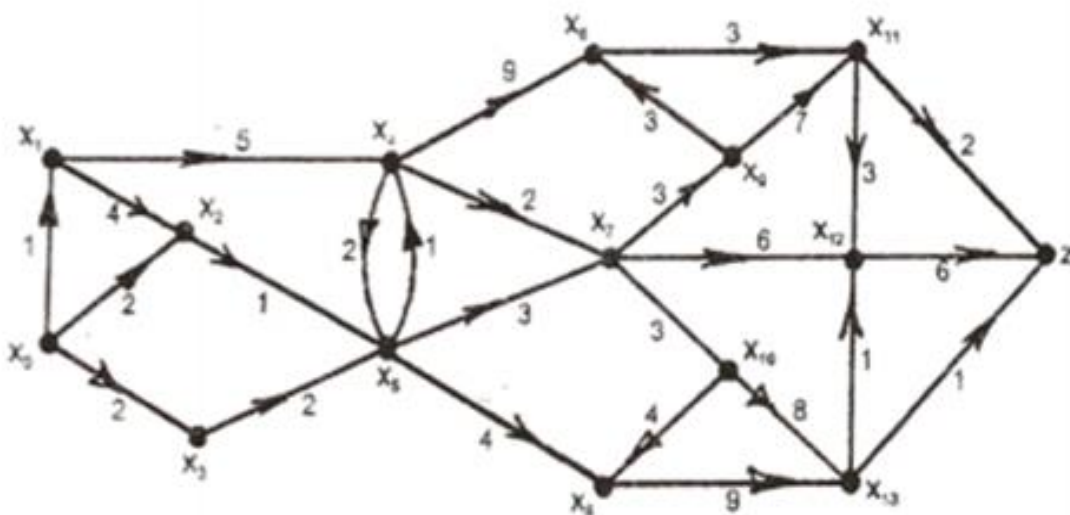
Задача 4

Нафтова компанія закуповує необроблену нафту зі свердловини X_0 та займається її очищенням на заводі у місті Z . Нехай вершини графа відповідають можливим проміжним пунктам, а дуги - можливим маршрутам. Довжина дуги (X_i, X_j) дорівнює транспортним витратам на перевезення нафти з міста X_i до міста X_j . Як необхідно транспортувати нафту задля мінімізації сумарних транспортних витрат?

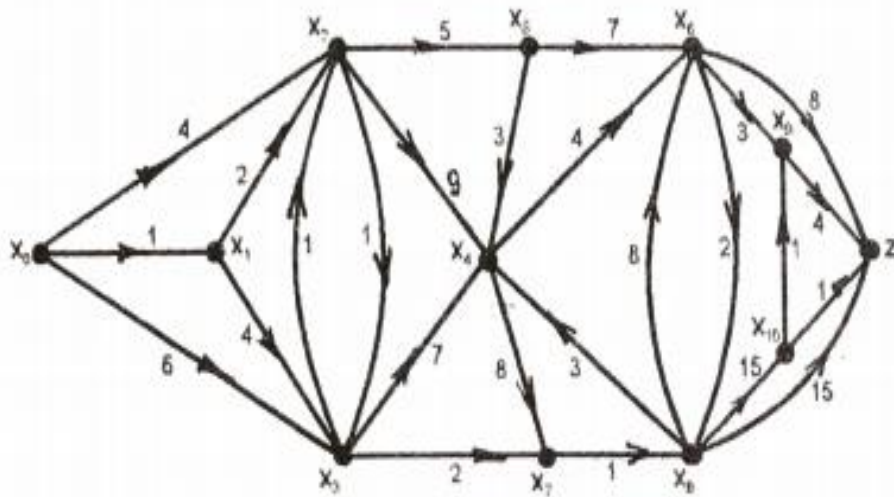
1.



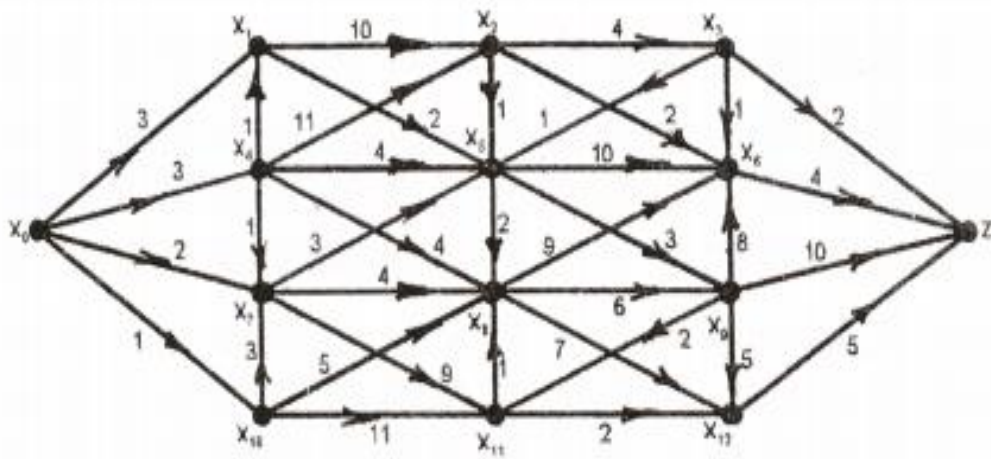
2.



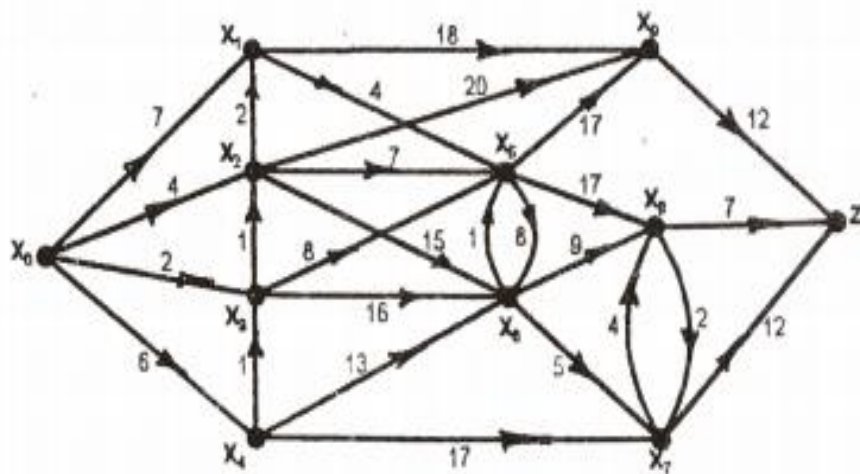
3.



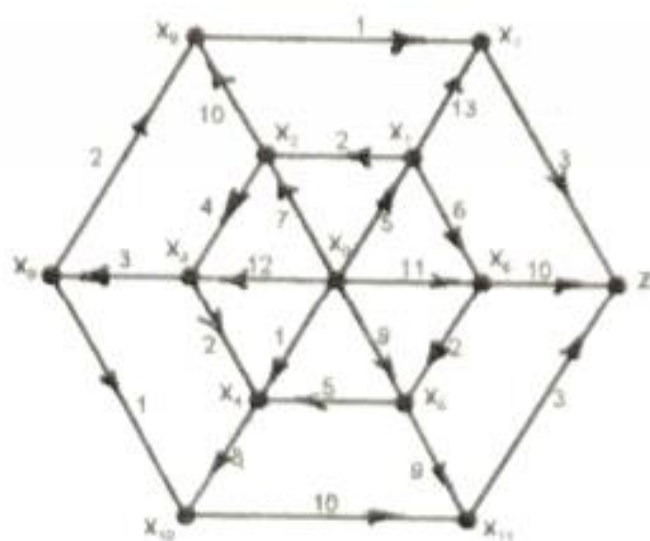
4.



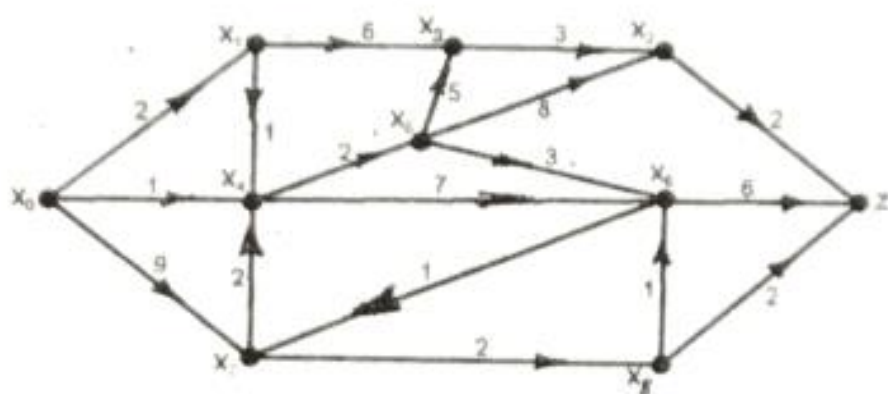
5.



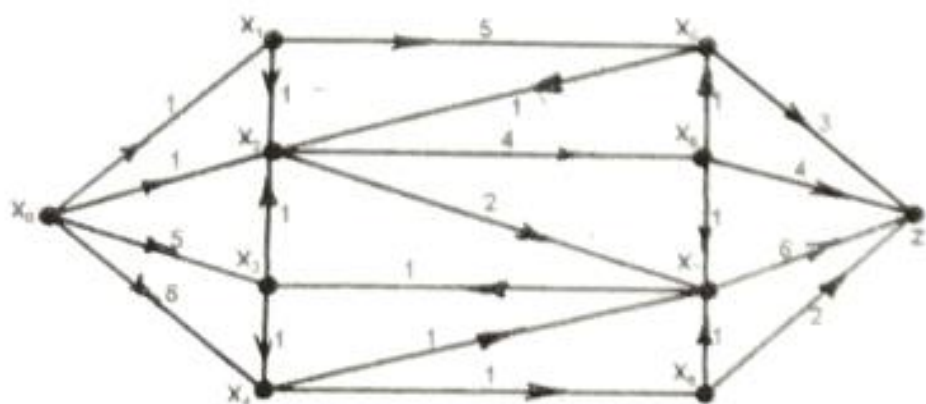
6.



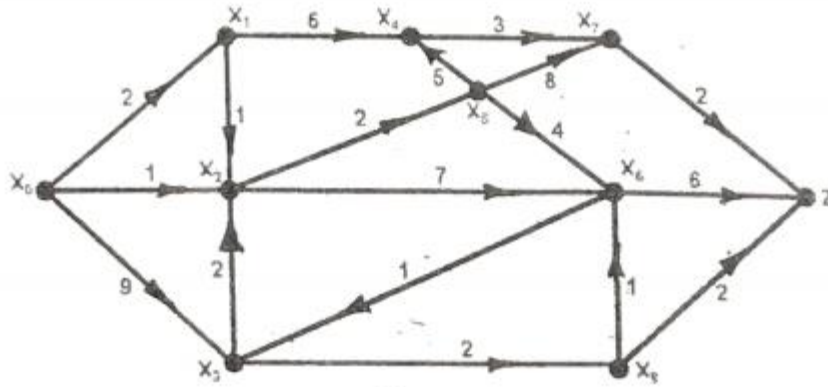
7.



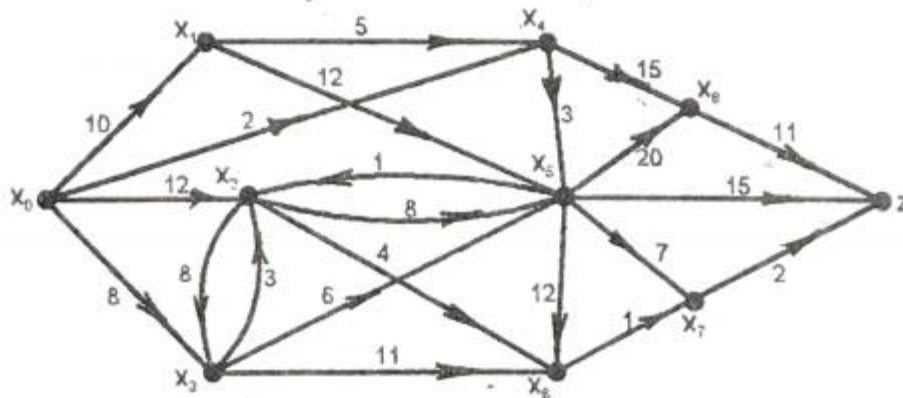
8.



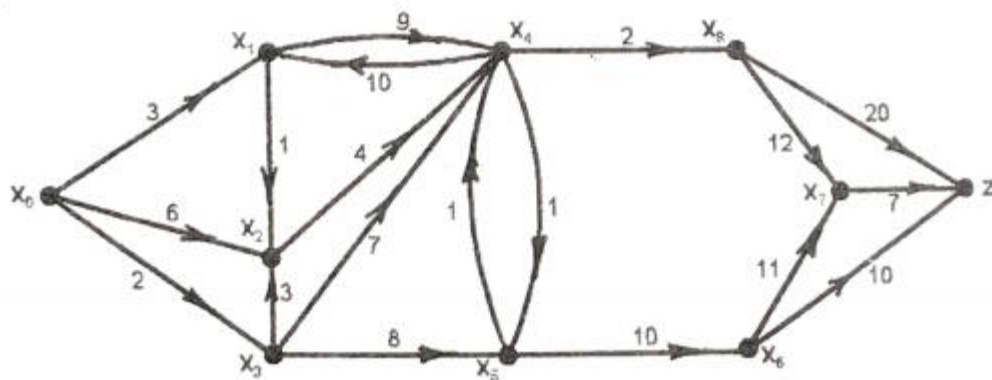
9.



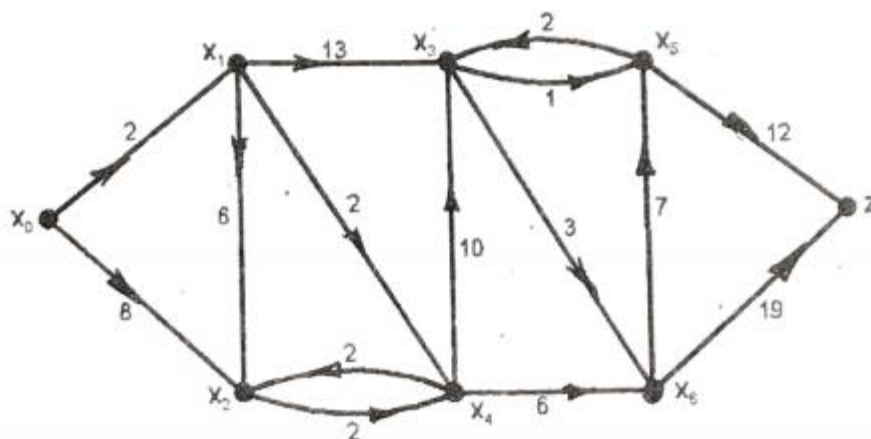
10.



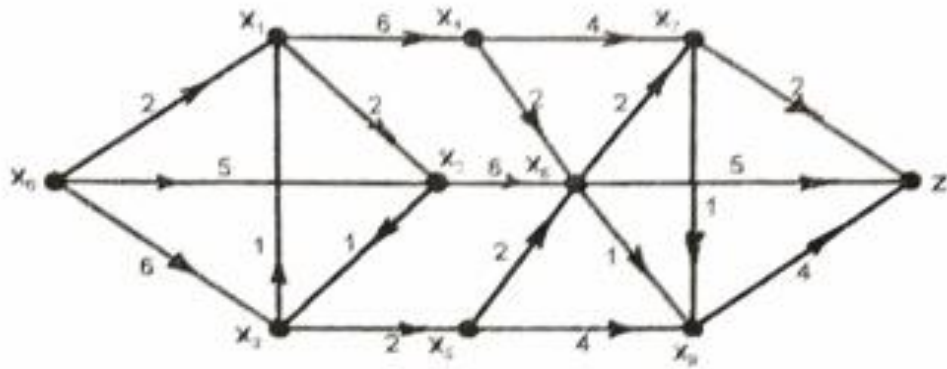
11.



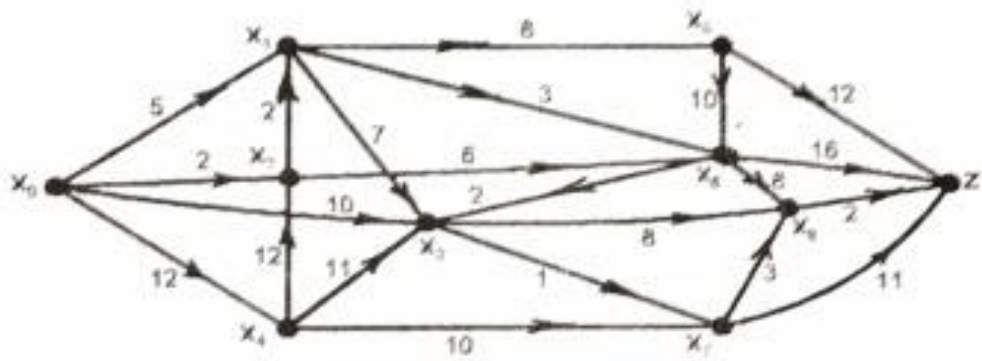
12.



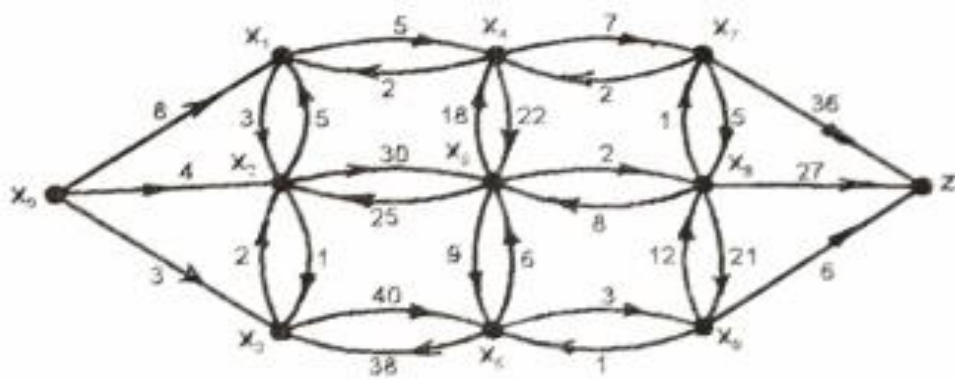
13.



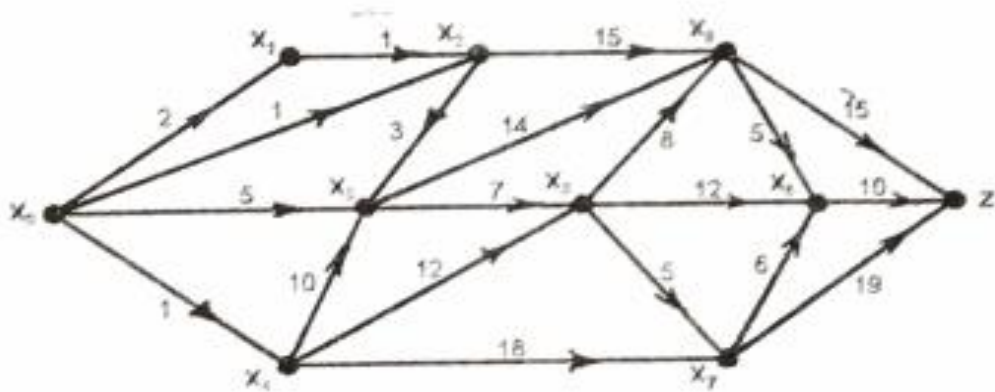
14.



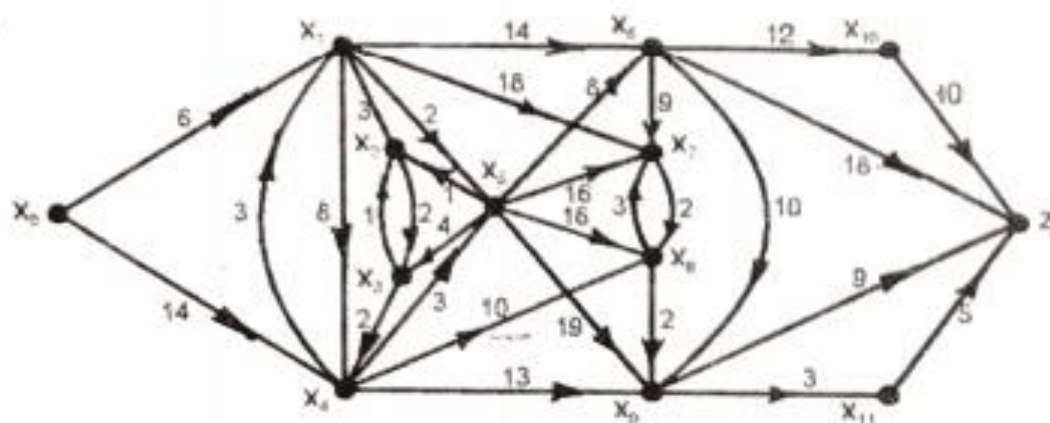
15.



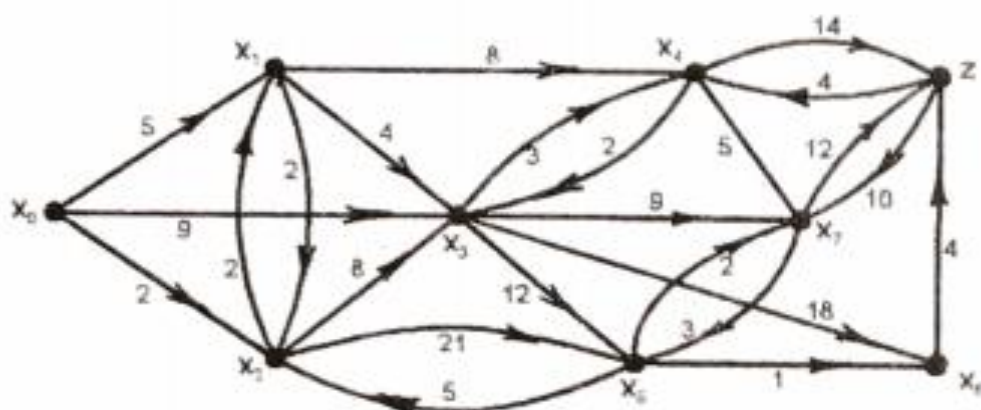
16.



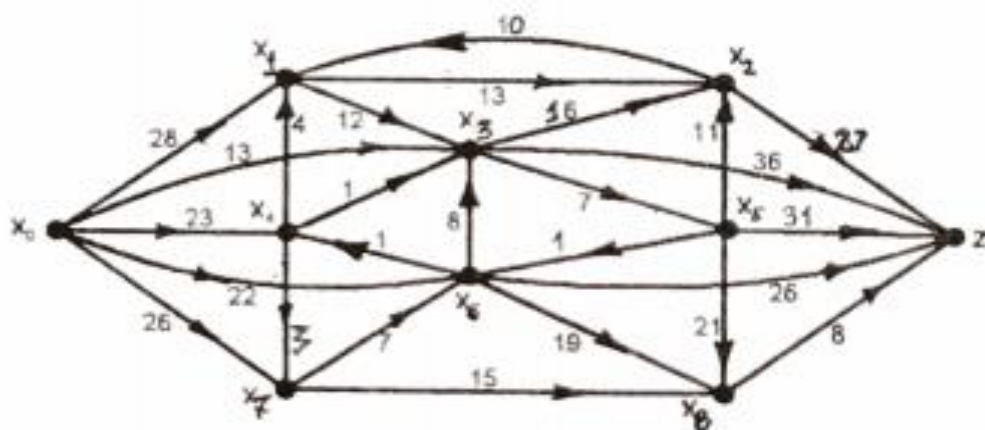
17.



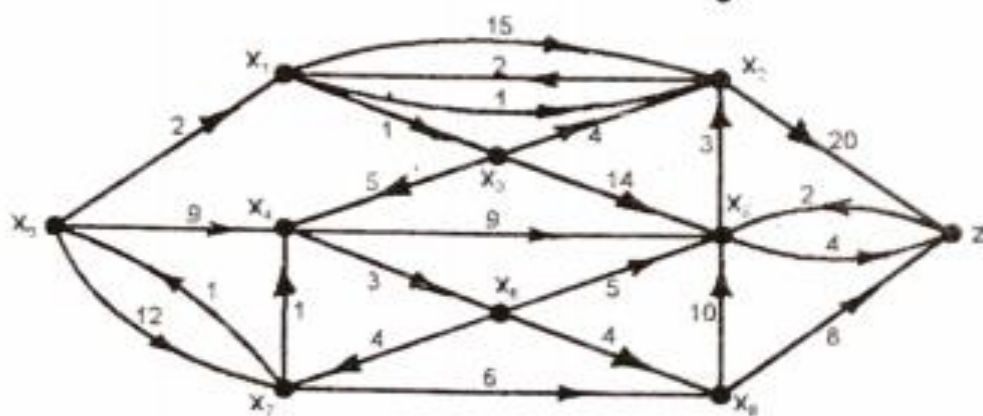
18.



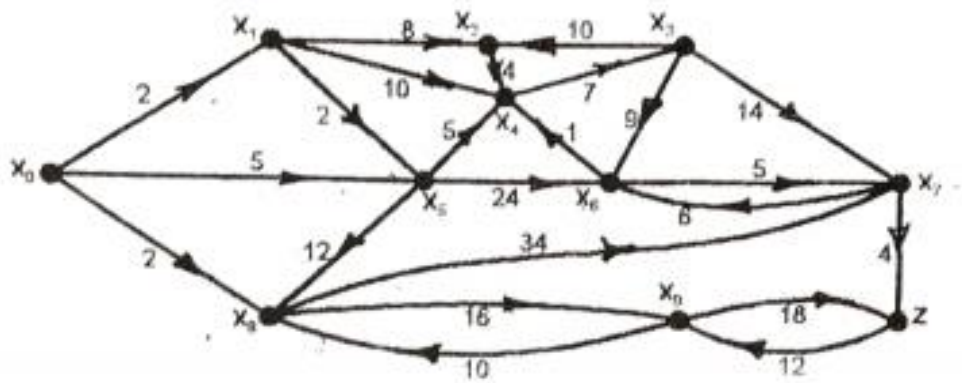
19.



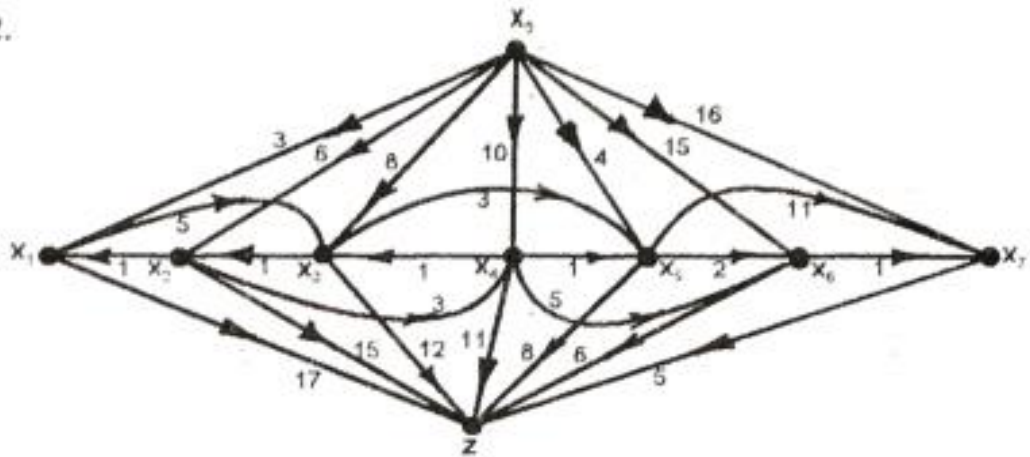
20.



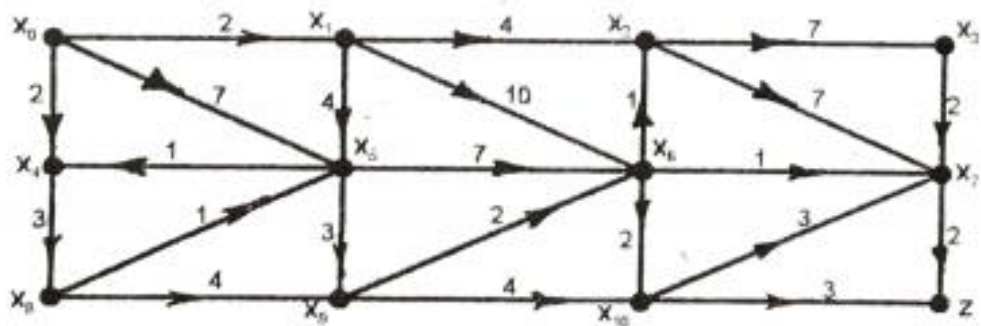
21.



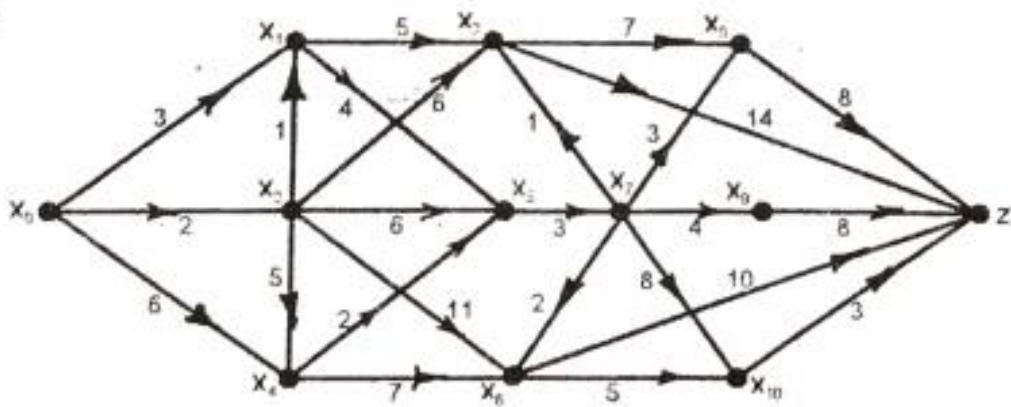
22.



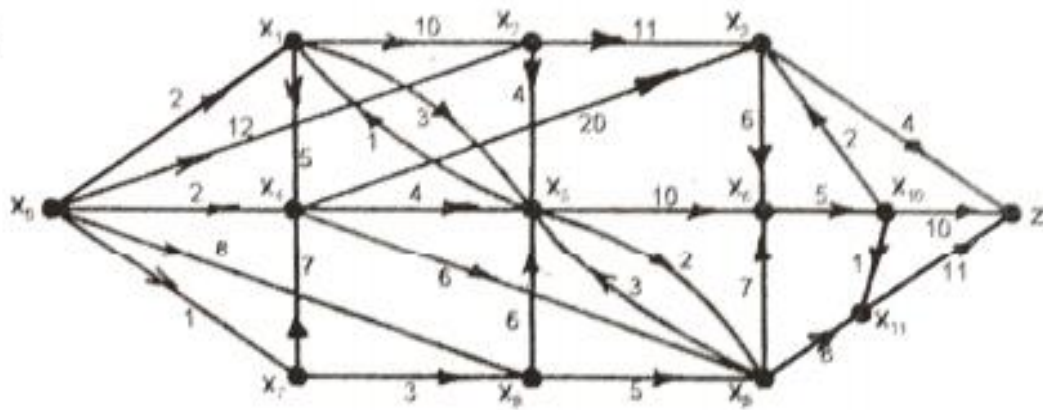
23.



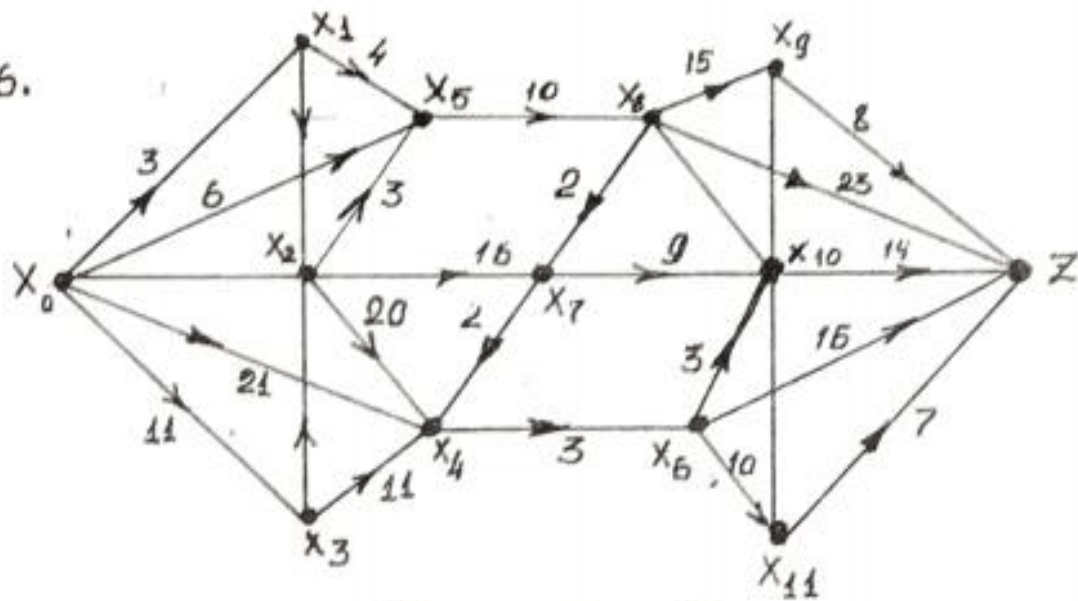
24.



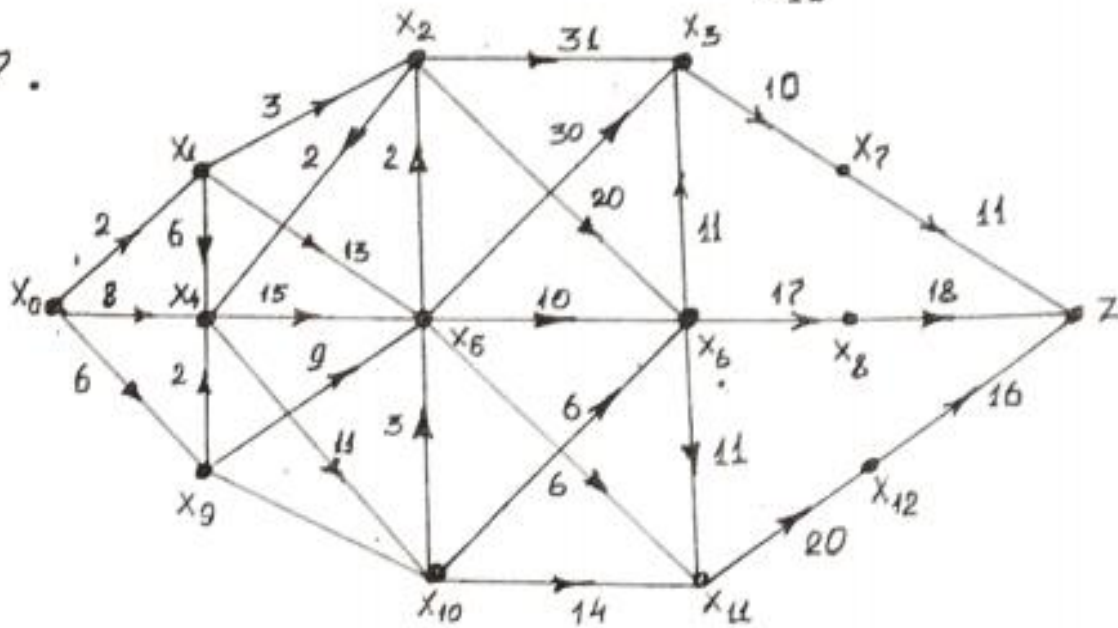
25.



26.



27.



ЛІТЕРАТУРА

1. Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Основи системного аналізу. – К., 2007. – 544 с.
2. Борисенко О.А. Основи дискретної математики. – К., 2007. – 255с.
3. Олійник Л.О. Дискретна математика. Навчальний посібник. – ДДТУ – 2015. – 256с.
4. Анфилатов В.С. и др. Системный анализ в управлении. - М., 2002. – 368с.
5. Карук Б.И. Системный подход и системный анализ в проектировании мелиоративно – водохозяйственных объектов. Учебное пособие. - К.,1989.
6. Кузьменко В.В., Швачич Г.Г., Рижанкова Г.І., Пасинков В.М. Основи дискретної математики. Розділ «Елементи теорії графів»: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2004. – 38с.
7. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. Гмурман В.Е. – М.: Высшая школа. 1999.
8. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Учебник для ВУЗов. – М., Высшая школа, 2001.- 343с.
9. Шарапов О.Д., Дербенцев В.Д. Системний аналіз. Навчально – методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. – К., 2003. – 154 с.